France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice, on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1) **a)** Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2) Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

a) Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E tel que $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}z_D$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1) a).

c) Montrer que $\arg\left(\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right)\ [2\pi]$.

d) Déduire des deux questions précédentes que le triangle AFG est équilatéral.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

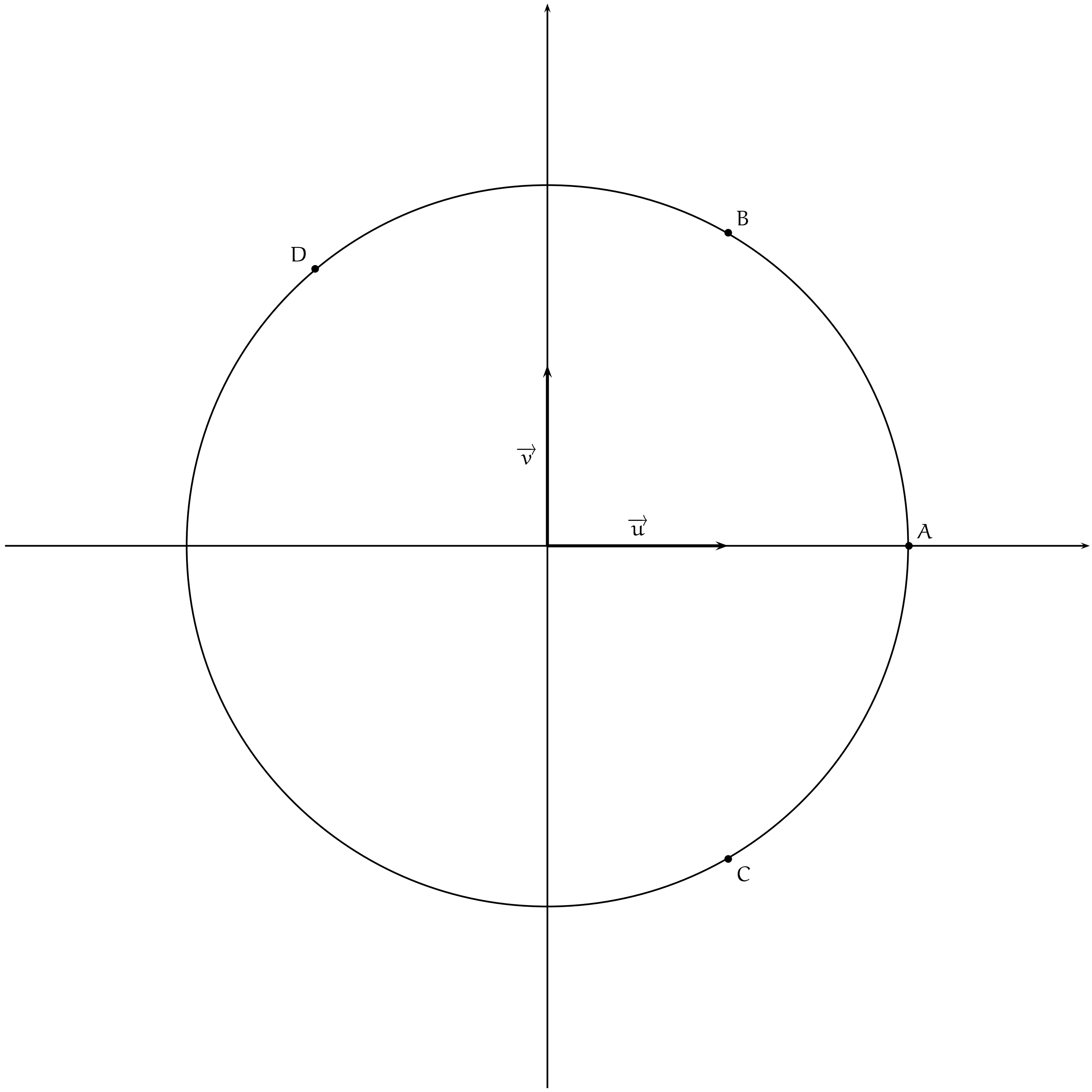
On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi\,;+\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.
Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;+\pi]$.
Compléter ce tableau de variation. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

ANNEXE 2 (Exercice 4)
(à rendre avec la copie)

(Candidats n'ayant pas suivi L'enseignement de spécialité)



France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

1) a)

$$\begin{aligned}\alpha^2-4\alpha+8 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(1+i\sqrt{3}\right)+8=\left(1+2i\sqrt{3}-3\right)-4-4i\sqrt{3}+8=2-2i\sqrt{3}\\ &=2\left(1-i\sqrt{3}\right)=2\overline{\alpha},\end{aligned}$$

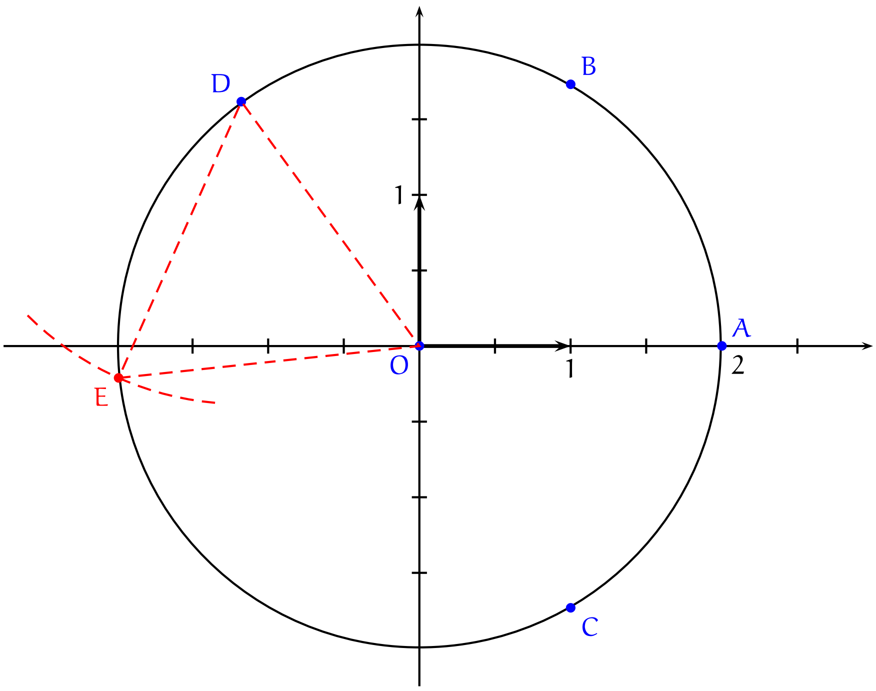
et donc

$$\boxed{\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8.}$$

b) Le cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 2.
Or $OB=|\alpha|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ puis $OC=|\overline{\alpha}|=|\alpha|=2$. Donc

$$\boxed{\text{les points } B \text{ et } C \text{ appartiennent au cercle } (\mathscr{C}).}$$

2) a) $|z_E|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\times|z_D|=|z_D|$ ou encore $OE=OD$. D'autre part, $\arg(z_E)=\arg(z_D)+\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.
Le point E est donc le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que le triangle ODE soit équilatéral direct.



b) Soit $\theta\in]-\pi,\pi]$.

$$z_E=e^{i\pi/3}z_D=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)e^{i\theta}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\theta}=\left(1+i\sqrt{3}\right)e^{i\theta}=\alpha e^{i\theta}.$$

$$\boxed{z_E=\alpha e^{i\theta}.}$$

3) a) $z_F=\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.

$$\boxed{z_F=\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}.}$$

b) Tout d'abord, $F\neq A$. En effet, si le milieu F de la corde $[BD]$ est le point A, en particulier, le milieu F de la corde $[BD]$ est sur le cercle $\mathscr{C}$ ce qui impose $B=D=F\neq A$. Donc, si $F=A$, on obtient une contradiction. Ensuite,

$$\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}-2}{\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}-2}=\frac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\frac{2\alpha e^{i\theta}+2\overline{\alpha}-8}{2(\alpha+2e^{i\theta}-4)}$$
$$=\frac{2\alpha e^{i\theta}+\alpha^2-4\alpha}{2(\alpha+2e^{i\theta}-4)}\ \text{(d'après la question 1)a))}$$
$$=\frac{\alpha(2e^{i\theta}+\alpha-4)}{2(\alpha+2e^{i\theta}-4)}=\frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}.}$$

c)

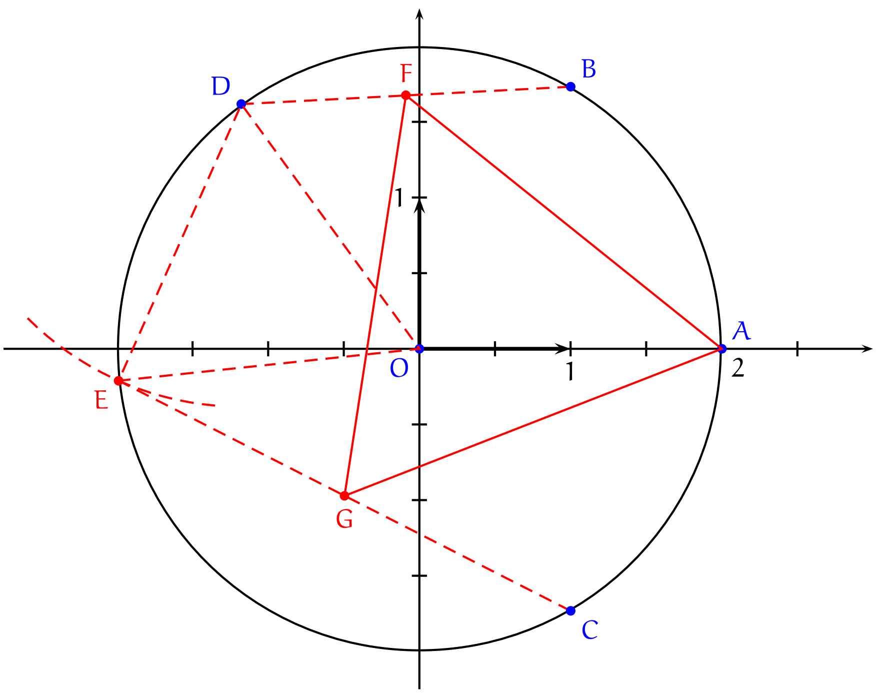
$$\arg\left(\frac{z_G-2}{z_F-2}\right)=\arg(z_G-z_A)-\arg(z_F-z_G)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AG}\right)-\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AF}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AG}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}\right)\ [2\pi].$$

d) $\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{|z_G-2|}{|z_F-2|}=\left|\dfrac{z_G-2}{z_F-2}\right|=\dfrac{|\alpha|}{2}=\dfrac{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\dfrac{2}{2}=1.$
Donc, $AG=AF$ et le triangle AFG est isocèle en A. De plus,

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}\right)=\arg\left(\frac{z_G-2}{z_F-2}\right)=\arg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arg\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

En résumé, le triangle AFG est isocèle en A et $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et donc

$$\boxed{\text{le triangle } AFG \text{ est équilatéral.}}$$



4) Tout d'abord, AF est minimal si et seulement si AF^2 est minimal avec $AF^2=f(\theta)$.
Ensuite, $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=4-3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4-2\sqrt{3}$ et $f(\pi)=4-3(-1)+0=7$ ce qui permet de compléter le tableau de variation.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\nearrow$		$\searrow$	7

Ce tableau de variation montre que la fonction f admet un minimum (ce qui valide la conjecture) en $x = -\dfrac{\pi}{6}$ et que ce minimum vaut $4-2\sqrt{3}$.

La valeur minimale de AF est $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

