France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

Polynésie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions.

1) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1) Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2) On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.

a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3) Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = -1 + i, \quad z_C = -1 - i \quad \text{et} \quad z_D = 1 - i.$$

Soient E et F les points d'affixes respectives :

$$z_E = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C) \quad \text{et} \quad z_F = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C).$$

1) Démontrer que l'affixe du point E est égale à $-1 + \sqrt{3}$.

2) Déterminer l'affixe z_F du point F.

3) Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.

4) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

