France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

Polynésie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions.

1) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1) Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2) On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.

a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3) Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = -1 + i, \quad z_C = -1 - i \quad \text{et} \quad z_D = 1 - i.$$

Soient E et F les points d'affixes respectives :

$$z_E = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C) \quad \text{et} \quad z_F = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C).$$

1) Démontrer que l'affixe du point E est égale à $-1 + \sqrt{3}$.

2) Déterminer l'affixe z_F du point F.

3) Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.

4) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

Polynésie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{((aa' - bb') + i(ab' + ba'))}\\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous nombres complexes } z \text{ et } z',\ \overline{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}.}$$

2) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

- C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après 1))}\\ &= (\overline{z})^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (\overline{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ et tout entier naturel non nul } n,\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n.}$$

Partie B

1) Soit z un nombre complexe. Puisque $(-z)^4 = z^4$,

$$z^4 = -4 \Rightarrow (-z)^4 = -4.$$

D'autre part, puisque -4 est un nombre réel,

$$z^4 = -4 \Rightarrow \overline{z^4} = \overline{-4} \Rightarrow (\overline{z})^4 = -4.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{si } z \text{ est solution de } (E) \text{ alors } -z \text{ et } \overline{z} \text{ sont solutions de } (E).}$$

2) a) $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

$$\boxed{z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.}$$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4(-1 + 0i) = -4$. Donc z_0 est solution de l'équation (E).

3) L'équation (E) admet $z_0 = 1 + i$ pour solution. mais alors, d'après la question 1, l'équation (E) admet aussi pour solution $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z_0} = 1 - i$ et donc aussi $-\overline{z_0} = -1 + i$.

$$\boxed{\text{Les quatre nombres } 1 + i,\ 1 - i,\ -1 + i \text{ et } -1 - i \text{ sont solutions de l'équation } (E).}$$

Partie C

1)

$$\begin{aligned}
z_E &= z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C)\\
&= -1 - i + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)((-1+i) - (-1-i)) = -1 - i + 2i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= -1 - i + i + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_E = -1 + \sqrt{3}.}$$

2)

$$\begin{aligned}
z_F &= z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)\\
&= -1 - i + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)((1-i) - (-1-i)) = -1 - i + 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= -1 - i + 1 - i\sqrt{3} = -i\left(1 + \sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_F = -i\left(1 + \sqrt{3}\right).}$$

3)

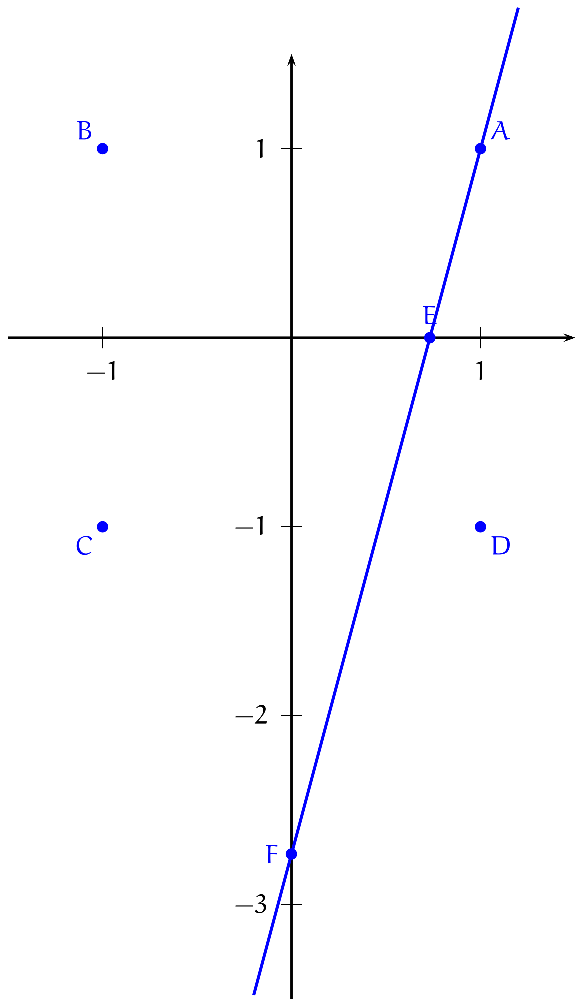
$$\begin{aligned}
\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} &= \frac{1 + i - \left(-1 + \sqrt{3}\right)}{1 + i + i\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{1 + \dfrac{i}{2 - \sqrt{3}}}{1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)}\\
&= \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)}{1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)} \text{ (car } \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1)\\
&= 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

4) De l'égalité $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = 2 - \sqrt{3}$, on déduit l'égalité $z_A - z_E = \left(2 - \sqrt{3}\right)(z_A - z_F)$ puis l'égalité $\overrightarrow{EA} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\overrightarrow{FA}$.

En particulier, les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{FA}$ sont colinéaires et on en déduit que

$$\boxed{\text{les points A, E et F sont alignés.}}$$


B
A
1
E
−1
1
C
−1
D
−2
F
−3

