Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

1) D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\begin{aligned}
z_E &= z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) = z_A + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(z_D - z_A) \\
&= i + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) = i + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i).
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i).}$$

2) $z_{D'} = \dfrac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \dfrac{2-i}{i+1} = \dfrac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-2i-i-1}{1^2+1^2} = \dfrac{1-3i}{2}.$

$$\boxed{z_{D'} = \frac{1-3i}{2}.}$$

3) a) Soit z un nombre complexe différent de i.

$$(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i) = \frac{2z-i-2z+2i}{iz+1}(z-i) = \frac{i(z-i)}{iz+1} = \frac{iz+1}{iz+1} = 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } z \neq i,\ (z'+2i)(z-i) = 1.}$$

b) Soient z un nombre complexe différent de i puis M le point d'affixe z.

$$BM' \times AM = |z' - z_B| \times |z - z_A| = |z' + 2i| \times |z - i| = |(z'+2i)(z-i)| = |1| = 1$$

puis il existe un entier relatif k tel que

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM'}\right) &= \arg\left(z_{\overrightarrow{BM'}}\right) + 2k\pi = \arg(z'+2i) + 2k\pi = \arg\left(\frac{1}{z-i}\right) + 2k\pi = -\arg(z-i) + 2k\pi \\
&= -\arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right) + 2k\pi = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi.
\end{aligned}$$

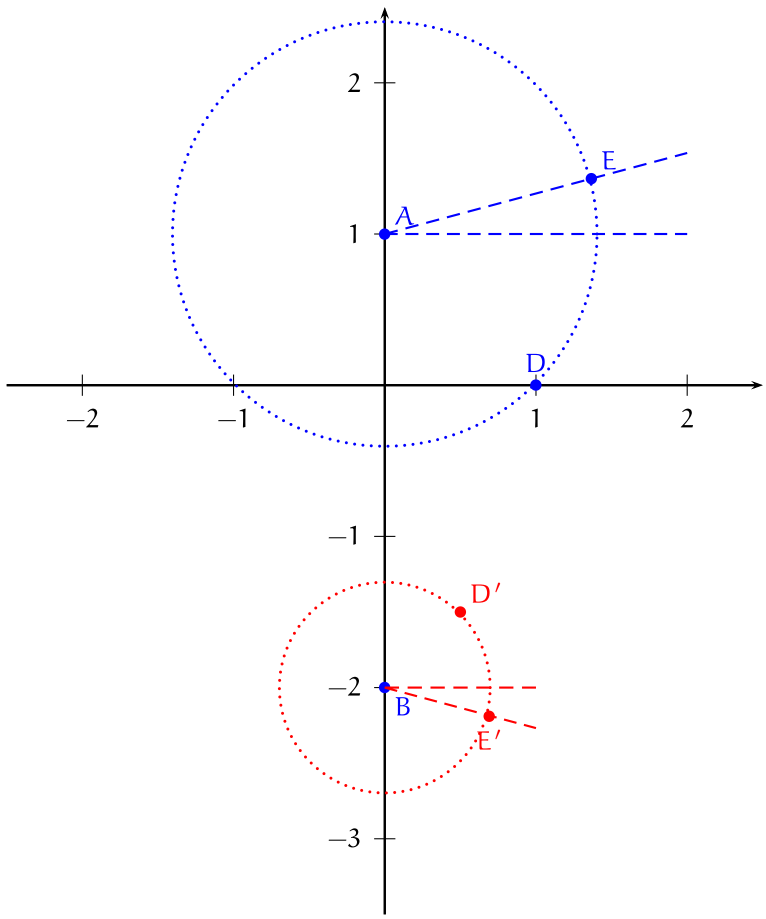
$$\boxed{\text{Pour tout } M \neq A,\ BM' \times AM = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

4. a) Puisque le triangle ADE est équilatéral,

$$AE = AD = |z_D - z_A| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\text{Les points } D \text{ et } E \text{ sont sur le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$$

b) $BE' \times AE = 1$ et donc $BE' = \dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Le point E' est sur le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Ensuite, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit une construction du point E' :

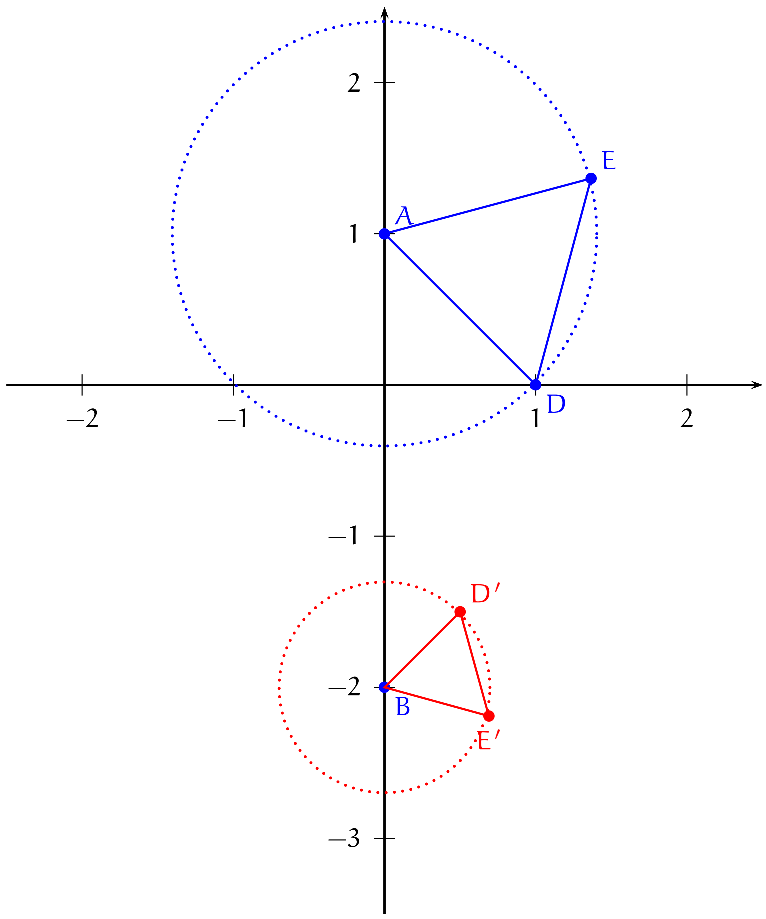


5) D'après la question 4), $\mathsf{BD'} = \dfrac{1}{\mathsf{AD}} = \dfrac{1}{\mathsf{AE}} = \mathsf{BE'}$ et

$$\left(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BD'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}\right) = -\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Par suite,

$$\boxed{\text{le triangle } BD'E' \text{ est équilatéral indirect.}}$$


2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
A
E
D
B
D′
E′

