

Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct. On admet que l'affixe du point E est donnée par :

$$z_E = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A).$$

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .

3) a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4) a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 3b), placer le point E' associé au point E par l'application f .
On laissera apparents les traits de construction.

5) Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?