

Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct. On admet que l'affixe du point E est donnée par :

$$z_E = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A).$$

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + i)$.

2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .

3) a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4) a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 3b), placer le point E' associé au point E par l'application f .
On laissera apparents les traits de construction.

5) Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

1) D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\begin{aligned} z_E &= z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) = z_A + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(z_D - z_A) \\ &= i + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) = i + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i). \end{aligned}$$

$$z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i).$$

$$2) z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2 - i}{i + 1} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i - i - 1}{1^2 + 1^2} = \frac{1 - 3i}{2}.$$

$$z_{D'} = \frac{1 - 3i}{2}.$$

3) a) Soit z un nombre complexe différent de i .

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z - i}{iz + 1} + 2i\right)(z - i) = \frac{2z - i - 2z + 2i}{iz + 1}(z - i) = \frac{i(z - i)}{iz + 1} = \frac{iz + 1}{iz + 1} = 1.$$

$$\text{Pour tout } z \neq i, (z' + 2i)(z - i) = 1.$$

b) Soient z un nombre complexe différent de i puis M le point d'affixe z .

$$BM' \times AM = |z' - z_B| \times |z - z_A| = |z' + 2i| \times |z - i| = |(z' + 2i)(z - i)| = |1| = 1$$

puis il existe un entier relatif k tel que

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) &= \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) + 2k\pi = \arg(z' + 2i) + 2k\pi = \arg\left(\frac{1}{z - i}\right) + 2k\pi = -\arg(z - i) + 2k\pi \\ &= -\arg(z_{\overline{AM}}) + 2k\pi = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + 2k\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } M \neq A, BM' \times AM = 1 \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

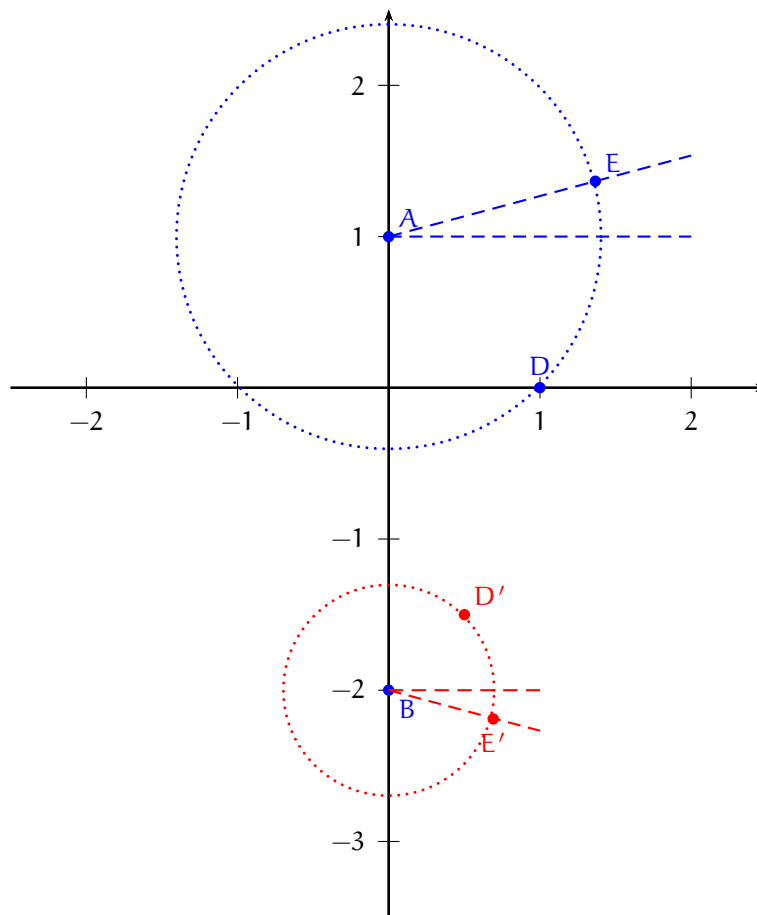
4. a) Puisque le triangle ADE est équilatéral,

$$AE = AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Les points D et E sont sur le cercle de centre A et de rayon } \sqrt{2}.$$

b) $BE' \times AE = 1$ et donc $BE' = \frac{1}{AE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le point E' est sur le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ensuite, $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On en déduit une construction du point E' :



5) D'après la question 4), $BD' = \frac{1}{AD} = \frac{1}{AE} = BE'$ et

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) &= (\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \\ &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par suite,

le triangle $BD'E'$ est équilatéral indirect.

