Antilles Guyane 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1) On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ et $h = -2$.
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2) Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

3) Montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4) On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G.
Placer G sur la figure.

5) Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle circoncscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.

6) On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

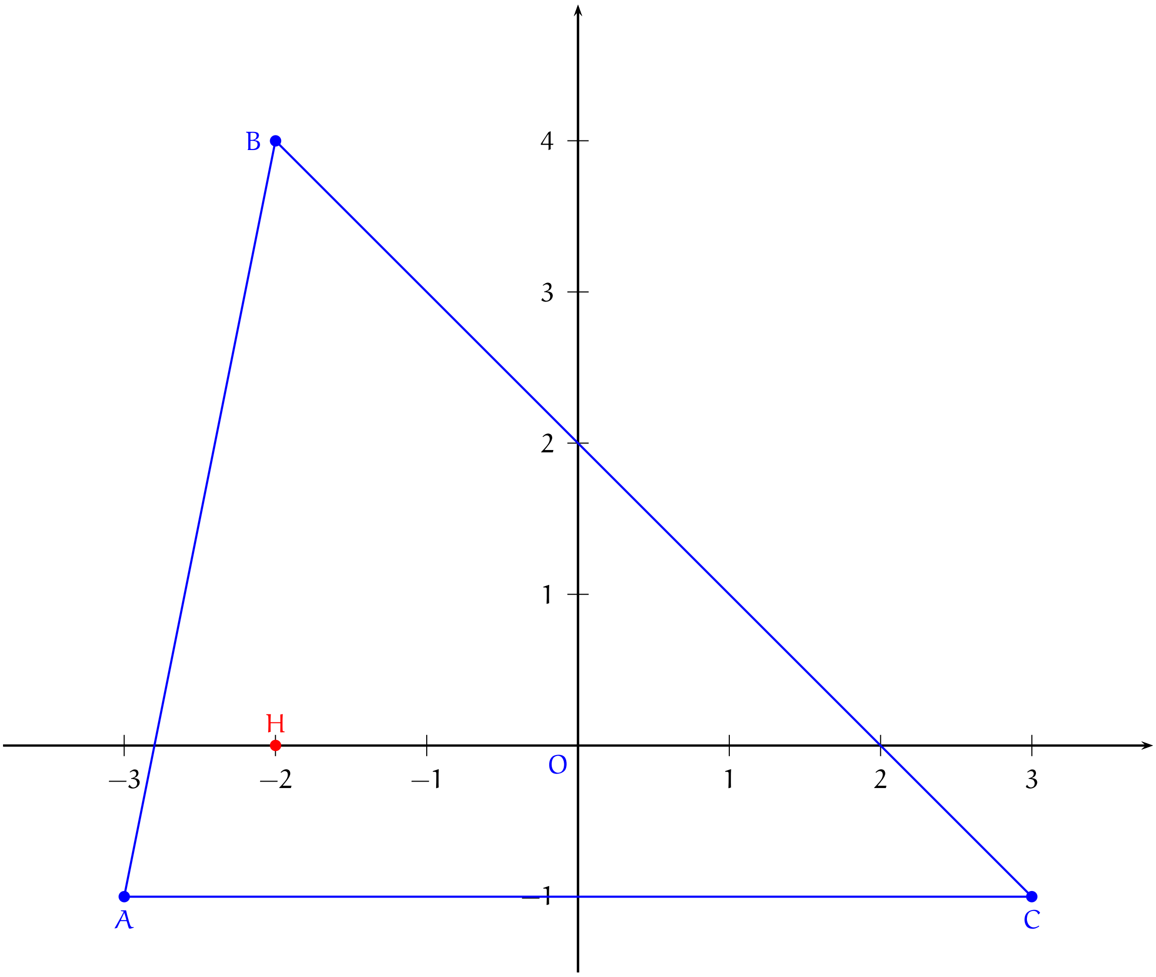
a) Déterminer l'affixe du point K.

b) Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

Antilles Guyane 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Figure.



2) • $JA = |a - i| = |-3 - i - i| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

• $JB = |b - i| = |-2 + 4i - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

• $JC = |c - i| = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

En résumé, $JA = JB = JC = \sqrt{13}$ et donc

$$\boxed{\text{le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC dont le rayon est } \sqrt{13}.}$$

3) Les coordonnées respectives des points A, H, B et C sont $(-3, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 4)$ et $(3, -1)$.
Les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont $(1, 1)$ et $(5, -5)$.

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 1 \times 5 + 1 \times (-5) = 0,$$

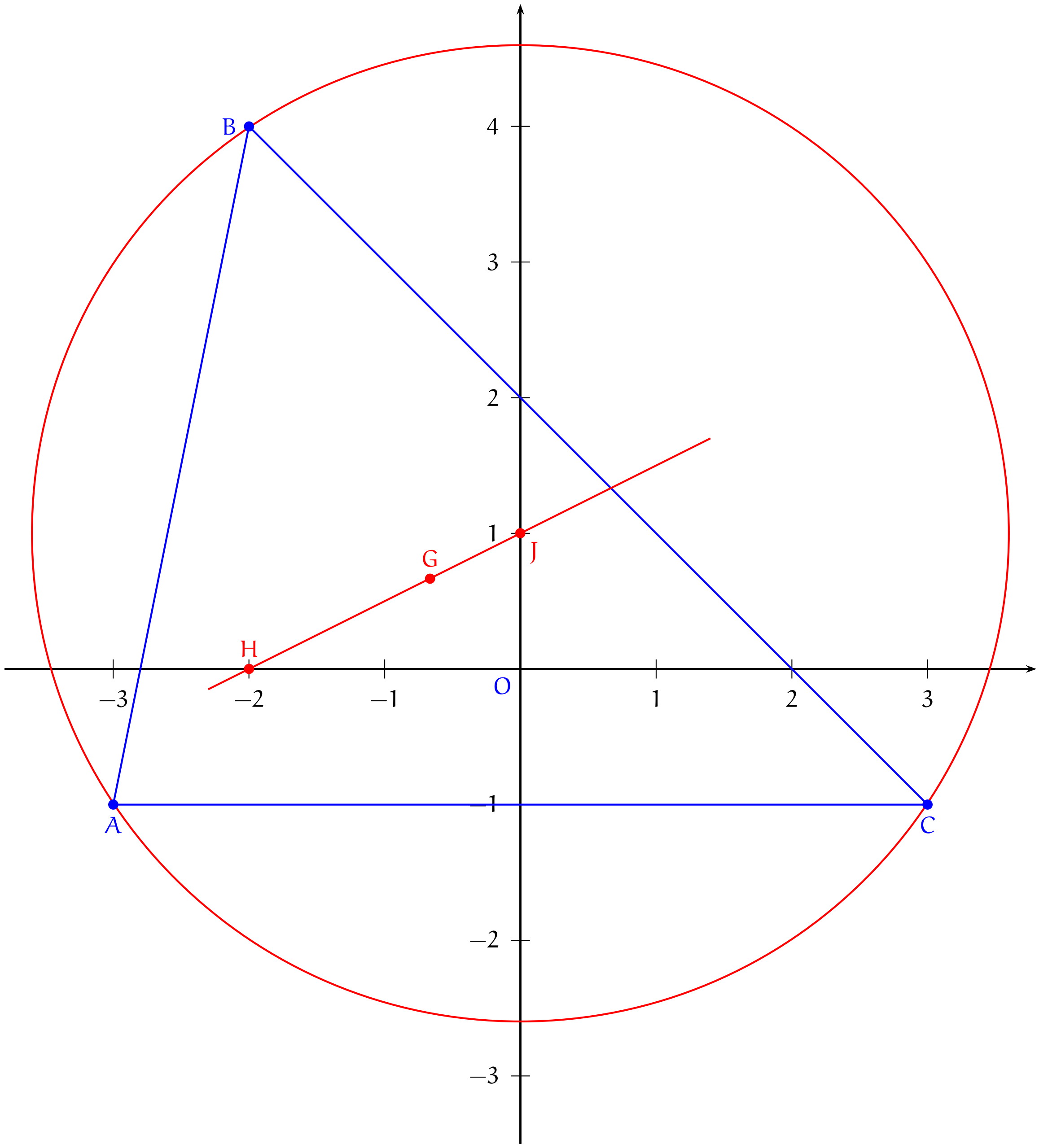
et donc

$$\boxed{\text{les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.}}$$

4) L'affixe g du centre de gravité du triangle ABC est

$$g = \frac{a + b + c}{3} = \frac{-3 - i - 2 + 4i + 3 - i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

5) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JG}$ est $g - i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i - i = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JH}$ est $h - i = -2 - i$.
Donc $h - i = 3(g - i)$ ou encore $\overrightarrow{JH} = 3\overrightarrow{JG}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires ou encore les points G, J et H sont alignés.



6) a) On note k l'affixe du point K.

$$k = \frac{a+h}{2} = \frac{-3-i-2}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

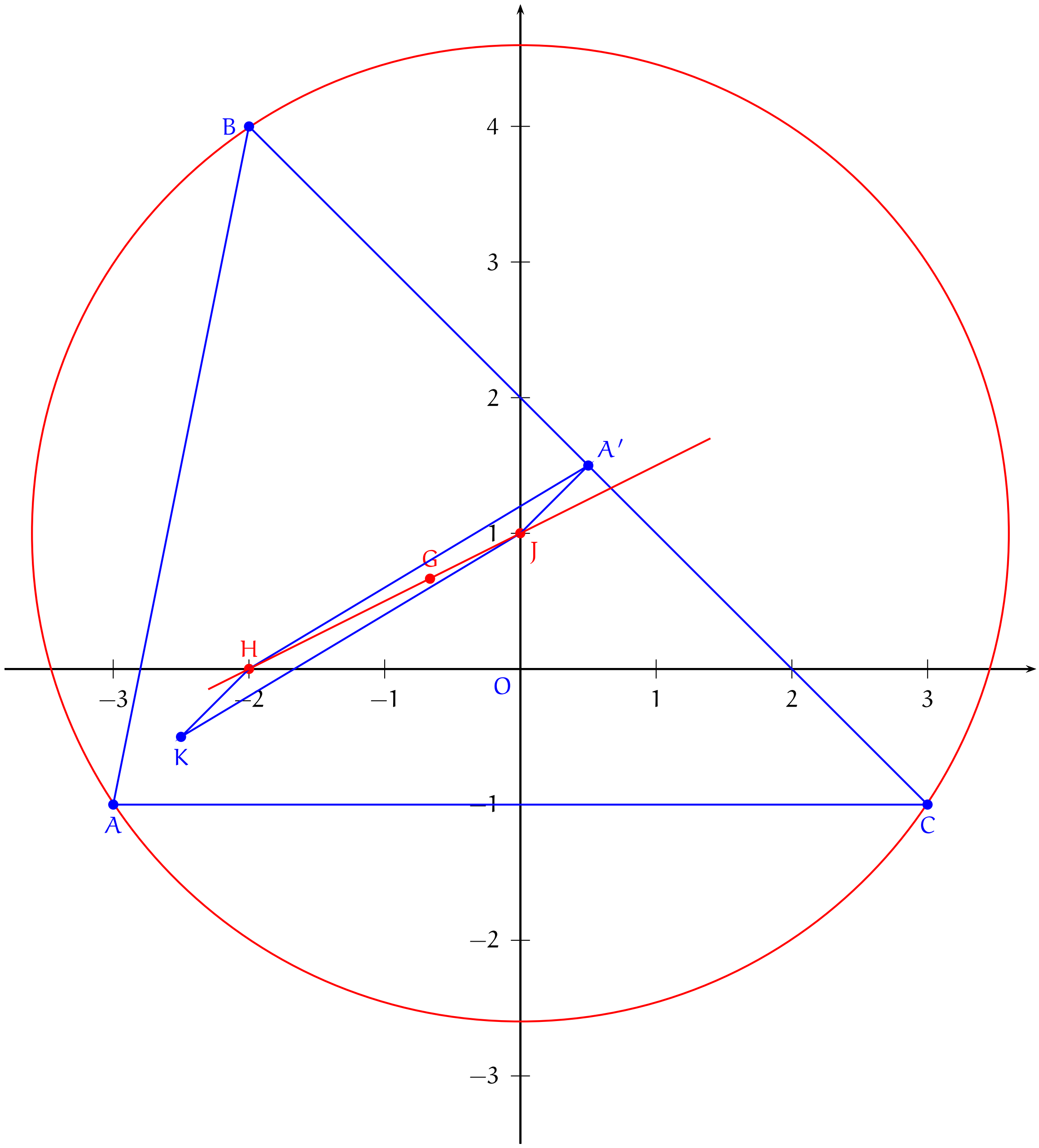
$$\boxed{\text{L'affixe du point } K \text{ est } k = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.}$$

b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$ est $a' - h = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - (-2) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{KJ}$ est $i - k = i - \left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$.

Ainsi, $a' - h = i - k$ ou encore $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{KJ}$ et par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } KHA'J \text{ est un parallélogramme.}}$$


B
A'
J
G
H
O
K
A
C
4
3
2
1
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3

