

# France métropolitaine 2011. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par A, B, C, D et E les points d'affixes respectives  $z_A = 1$ ,  $z_B = i$ ,  $z_C = -1$ ,  $z_D = -i$  et

$$z_E = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i).$$

1) L'angle  $\widehat{DAE}$  est égal à :

- $\frac{\pi}{6}$ ,
- $\frac{\pi}{4}$ ,
- $\frac{\pi}{3}$ ,
- $\frac{\pi}{2}$ .

2) L'ensemble des points d'affixe  $z$  telle que  $|z + i| = |z - 1|$  est :

- la médiatrice du segment  $[AB]$ ,
- le milieu du segment  $[BC]$ ,
- le cercle de centre  $O$  et de rayon 1,
- la médiatrice du segment  $[AD]$ .

3) L'ensemble des points d'affixe  $z$  telle que  $\frac{z + i}{z + 1}$  soit un réel est :

- la droite  $(CD)$  privée du point  $C$ ,
- le cercle de diamètre  $[CD]$  privé du point  $C$ ,
- le cercle de diamètre  $[BD]$  privé du point  $C$ ,
- la médiatrice du segment  $[AB]$ .

4) L'ensemble des points d'affixe  $z$  telle que  $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  est :

- le demi-cercle de diamètre  $[BD]$  passant par  $A$ ,
- la droite  $(BD)$ ,
- la demi-droite  $]BD)$  d'origine  $B$  passant par  $D$  privée de  $B$ ,
- le cercle de diamètre  $[BD]$  privé de  $B$  et  $D$ .

## EXERCICE 2 : corrigé

1. Réponse 3
2. Réponse 4
3. Réponse 1
4. Réponse 3

**Explication 1.** Les points A, D et E ont pour coordonnées respectives  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$  et  $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Les vecteurs  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$  ont pour coordonnées respectives  $(-1, -1)$  et  $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$$\bullet \vec{AD} \cdot \vec{AE} = (-1) \times \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + (-1) \times \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2} = 1.$$

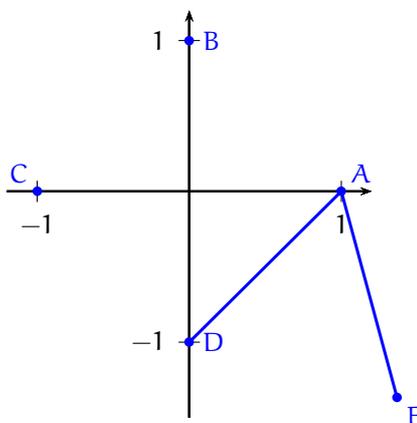
$$\bullet \|\vec{AD}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\bullet \|\vec{AE}\| = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{2}.$$

Par suite,

$$\cos(\widehat{DAE}) = \cos(\vec{AD}, \vec{AE}) = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AE}}{\|\vec{AD}\| \|\vec{AE}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

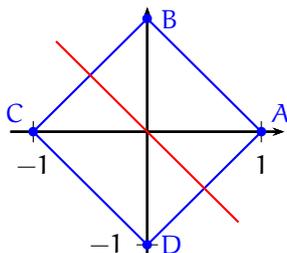
On en déduit que  $\widehat{DAE} = \frac{\pi}{3}$ . La bonne réponse est la troisième.



**Explication 2.** Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z-z_D| = |z-z_A| \Leftrightarrow MD = MA \Leftrightarrow M \in \text{med}[AD].$$

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AD]. La bonne réponse est la quatrième.



**Explication 3.** On note (E) l'ensemble des points M d'affixe z telle que  $\frac{z+i}{z+1}$  soit un réel.

Soit M un point du plan distinct de C dont l'affixe est notée z.

On pose  $z = x + iy$  où x et y sont deux réels. Pour tout  $z \neq -1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z+1} &= \frac{x+iy+i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y+1)}{(x+1)+iy} = \frac{(x+i(y+1))((x+1)-iy)}{((x+1)+iy)((x+1)-iy)} \\ &= \frac{x(x+1)-ixy+i(x+1)(y+1)+y(y+1)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x(x+1)+y(y+1)}{(x+1)^2+y^2} + i \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z+1} \text{ réel} \Leftrightarrow \operatorname{Im} \left( \frac{z+i}{z+1} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x+y+1=0 \text{ et } z \neq -1. \end{aligned}$$

Ensuite, le point C appartient à la droite d'équation  $x+y+1=0$  car  $x_C+y_C+1=-1+0+1=0$ .  
(E) est donc la droite d'équation  $x+y+1=0$  privée du point C.

Enfin,  $x_D+y_D+1=0-1+1=0$  et donc le point D appartient aussi à la droite d'équation  $x+y+1=0$ . Cette droite est donc la droite (CD) et finalement (E) est la droite (CD) privée du point C.

La bonne réponse est la première.

**Explication 4.** On note (E) l'ensemble considéré. Le point B d'affixe  $i$  n'appartient pas à (E) car 0 n'a pas d'argument. Soit M un point du plan d'affixe  $z \neq i$ .

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{BD}) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow M \in ]BD). \end{aligned}$$

Donc (E) est la demi-droite d'origine B passant par D et privée du point B. La bonne réponse est la troisième.