Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \ ; \quad b = -2 - i \ ; \quad c = -3 + i.$$

1) Placer les points A, B et C sur le graphique.

2) **a)** Calculer $\frac{b}{a}$.

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{b}{a}$.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right)$ $[2\pi]$.

d) Déduire des questions précédentes la nature du triangle OAB.

3) On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M′ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}.$$

a) Calculer l'affixe c' du point C′, image de C par f et placer le point C′ sur la figure.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

c) Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

On appelle J le point d'affixe $-ia$.

On appelle K le point d'affixe ic.

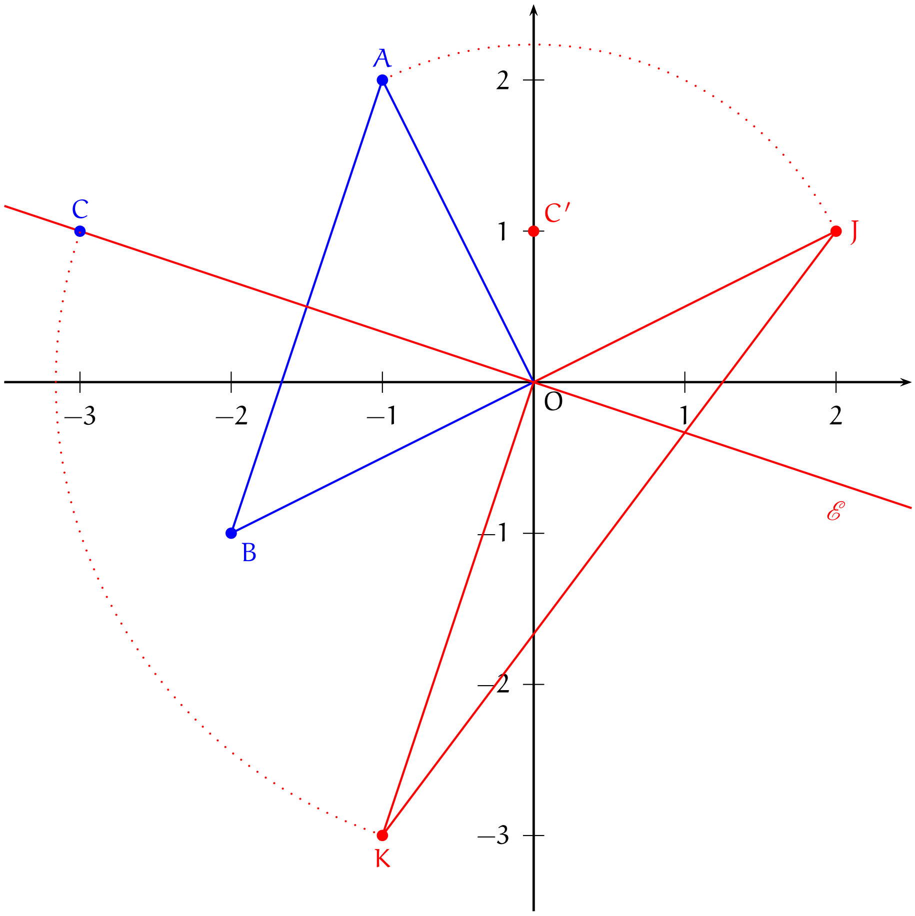
On note L le milieu de [JK].

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Graphique.



2) a) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-i}{-1+2i} = \dfrac{i(-1+2i)}{-1+2i} = i$.

b) On en déduit que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = |i| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(i) = \arg\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

c) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) = -\arg(a) + \arg(b) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right)$ $[2\pi]$.

d) $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|} = \dfrac{OB}{OA}$ et puisque $\left|\dfrac{b}{a}\right| = 1$, on en déduit que $OA = OB$. Donc, le triangle OAB est isocèle en O.
Puisque $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, le triangle OAB est rectangle en O.
Finalement

$$\boxed{\text{le triangle OAB est isocèle rectangle en O.}}$$

3) a)

$$c' = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{b}{a} = i.$$

Le point $C' = f(C)$ a donc pour coordonnées $(0, 1)$.

b) Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z.

$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|z+1-2i|}{|z+2+i|} = 1 \Leftrightarrow |z-(-1+2i)| = |z-(-2-i)| \text{ (et } z \neq -2-i) \\
&\Leftrightarrow AM = BM \text{ (et } M \neq B) \\
&\Leftrightarrow AM = BM \text{ (car si } M = B, \text{ alors } AM \neq BM) \\
&\Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

c) $|z_{O'}| = \left|\dfrac{1-2i}{2+i}\right| = \left|\dfrac{b}{a}\right| = 1$. Donc $O \in \mathscr{E}$.
$|c'| = |i| = 1$. Donc $C \in \mathscr{E}$.

Puisque $\mathscr{E}$ est une droite, $\mathscr{E}$ est la droite (OC).

4) • $z_J = -iz_A = -i(-1+2i) = 2+i$ et $z_K = iz_C = i(-3+i) = -1-3i$. Donc le point J a pour coordonnées $(2, 1)$ et le point K a pour coordonnées $(-1, -3)$.

• Le milieu L du segment $[JK]$ a pour affixe $z_L = \dfrac{z_J + z_K}{2} = \dfrac{2+i-1-3i}{2} = \dfrac{1}{2} - i$. Donc le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

• La médiane issue de O du triangle OJK est la droite (OL). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OL}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-3-(-1), 1-2)$ ou encore $(-2, -1)$.

$$\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \times (-2) + (-1) \times (-1) = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ou encore la droite (OL) est perpendiculaire à la droite (AC). Ainsi, la droite (OL) est également la hauteur issue de O du triangle OAC.

