

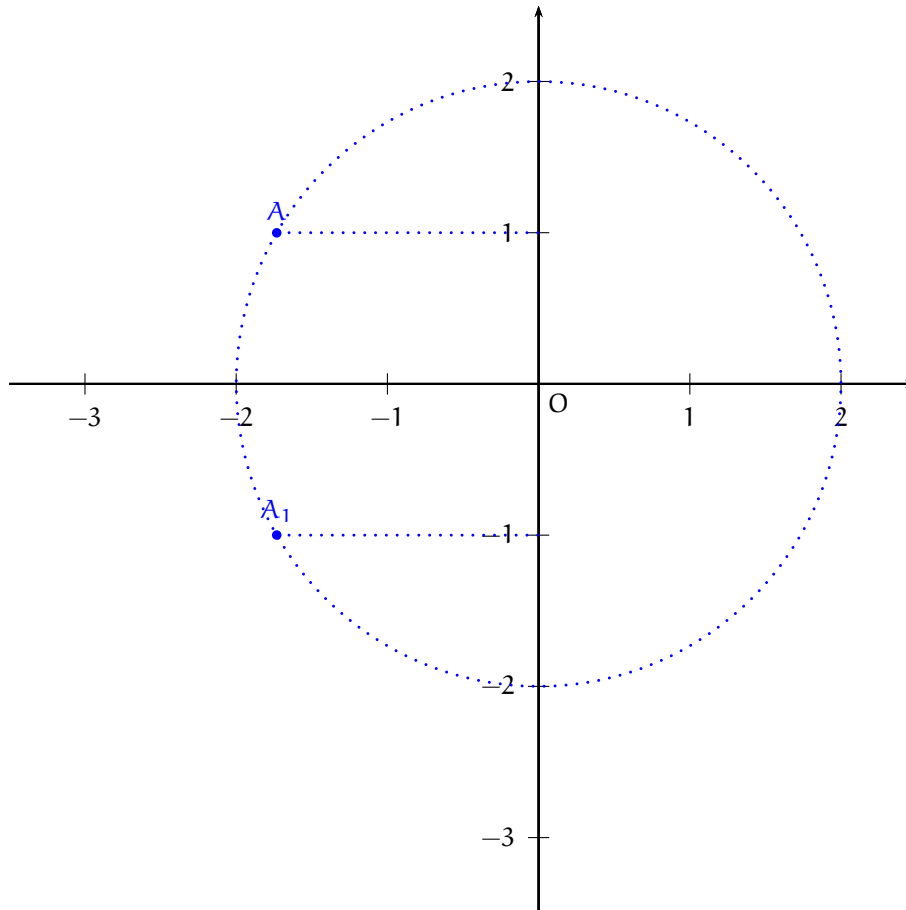
Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

$$1) \text{ a) } |z_A| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \text{ puis}$$

$$z_A = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

Graphique. A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'ordonnée 1 et d'abscisse négative. A₁ est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.



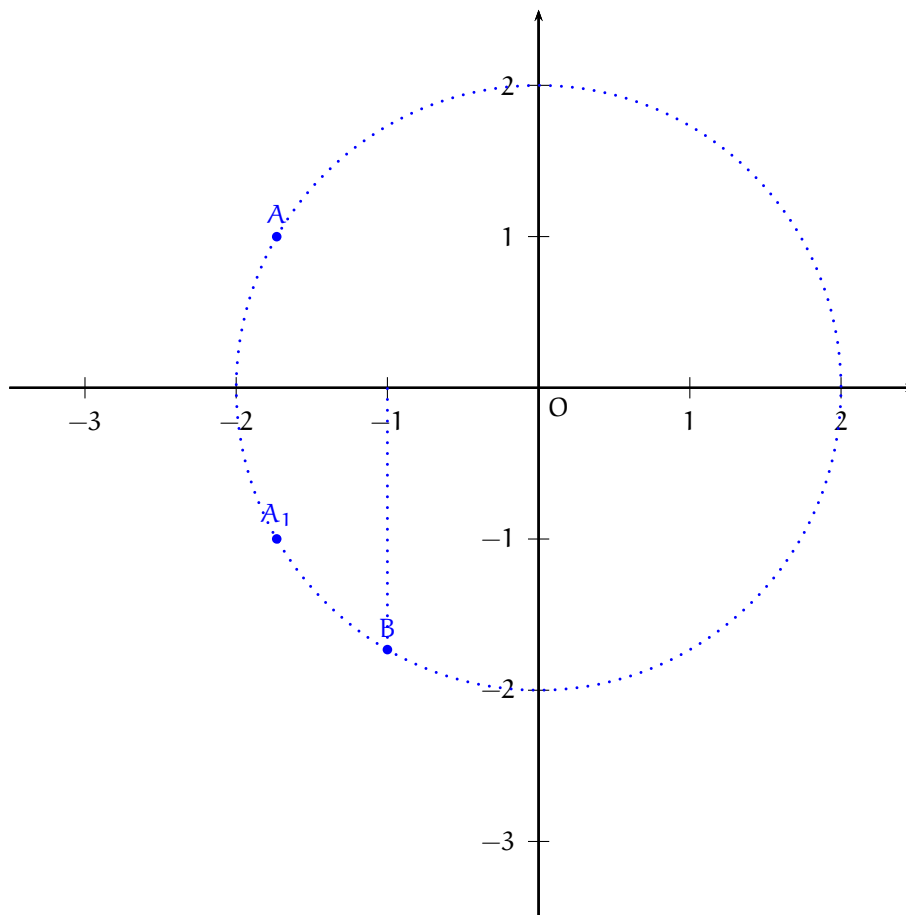
$$\text{b) } z_{A_1} = \overline{2e^{\frac{5i\pi}{6}}} = 2\overline{e^{\frac{5i\pi}{6}}} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} \text{ puis}$$

$$z_B = e^{\frac{i\pi}{6}} z_{A_1} = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{-\frac{4i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ensuite,

$$z_B = 2 \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}.}$$

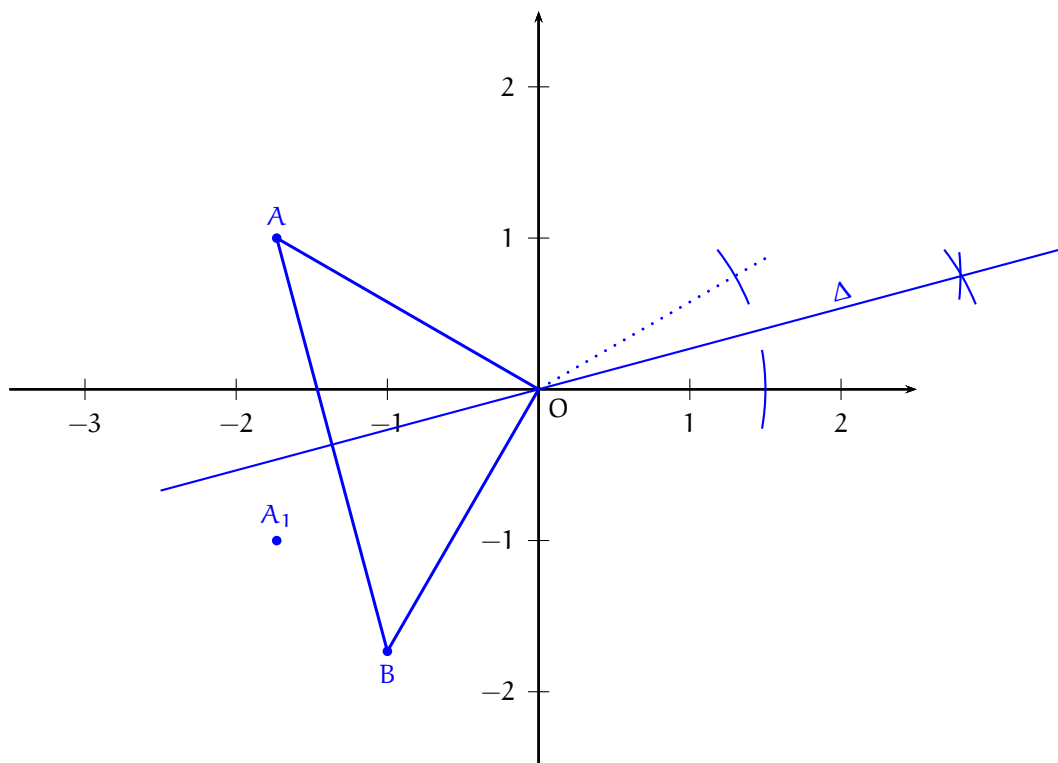


2) a) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$. On en déduit que $OA = OB$ et donc que le triangle OAB est isocèle en O .
 Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OA} sont $(-\sqrt{3}, 1)$ et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OB} sont $(-1, -\sqrt{3})$.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3}) \times (-1) + 1 \times (-\sqrt{3}) = 0.$$

On en déduit que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires et donc que le triangle OAB est rectangle en O .
 Finalement, le triangle OAB est rectangle isocèle en O .

b) Pour construire Δ , on construit au compas la bissectrice d'un angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.



$$c) (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\arg(z_A) + \arg(z_{\overrightarrow{w}}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right) [2\pi].$$

$$\text{On admet que } (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right) [2\pi].$$

d) L'affixe du vecteur \overrightarrow{w} est $e^{\frac{i\pi}{12}}$ puis

$$\bullet (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6})}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\bullet (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right) = \arg\left(\frac{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{12}}}\right) = \arg\left(2e^{i(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12})}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Donc, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB})$. Ceci montre que la droite Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Puisque le triangle OAB est isocèle en O d'après la question 2)a), la droite Δ est également la médiatrice du segment $[AB]$. On en déduit que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ .

$$3) z_{B_1} = \overline{(2e^{-\frac{2i\pi}{3}})} = 2\overline{(e^{-\frac{2i\pi}{3}})} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ puis}$$

$$z_{B'} = e^{\frac{i\pi}{6}} z_{B_1} = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = z_A,$$

et donc $B' = A$.

$$4) |z_C| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \text{ puis}$$

$$z_C = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Le point O appartient à la droite Δ . Donc, O est le symétrique de O par rapport à Δ . Comme d'autre part, D est le symétrique de C par rapport à Δ , on a

$$OD = OC = |z_C| = 2.$$

Posons alors $z_D = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}) = \theta [2\pi]$. Puisque D est le symétrique de C par rapport à la droite Δ , la droite Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. Mais alors $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OD})$. Or,

$$\bullet (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} [2\pi],$$

$$\bullet (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{12} + \theta [2\pi].$$

Par suite, $-\frac{\pi}{12} + \theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} [2\pi]$ ou encore $\theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} [2\pi]$ ou enfin $\theta = -\frac{\pi}{12} [2\pi]$. Finalement,

$$z_D = 2e^{-\frac{i\pi}{12}}.$$

