Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère le points A, d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A.

On note enfin B le point d'affixe $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}} z_{A_1}$.

1) **a)** Écrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

b) Vérifier que $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.
Placer alors le point B dans le même repère.

2) On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $\left(\vec{u}, \vec{w}\right) = \dfrac{\pi}{12}$ et la droite Δ passant par O de vecteur directeur $\vec{w}$.

a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
b) Tracer la droite Δ.
c) Montrer que $\left(\overrightarrow{OA}, \vec{w}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_A}\right)$ $[2\pi]$. On admettra que $\left(\vec{w}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_{\vec{w}}}\right)$ $[2\pi]$.
d) Montrer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3) On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(O; \vec{u}\right)$ puis B' le point d'affixe $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{6}} z_{B_1}$.
Démontrer que $B' = A$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1 + i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.
Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D sous forme exponentielle.

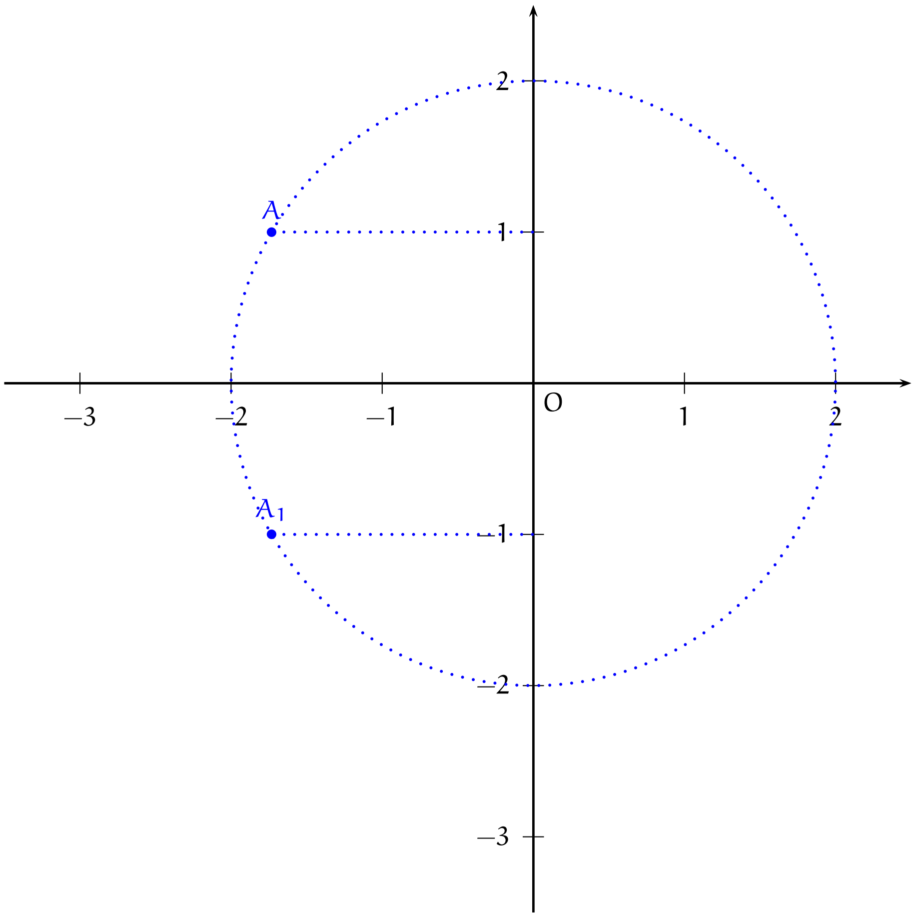
Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) $|z_A| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ puis

$$z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

Graphique. A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'ordonnée 1 et d'abscisse négative. A_1 est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.



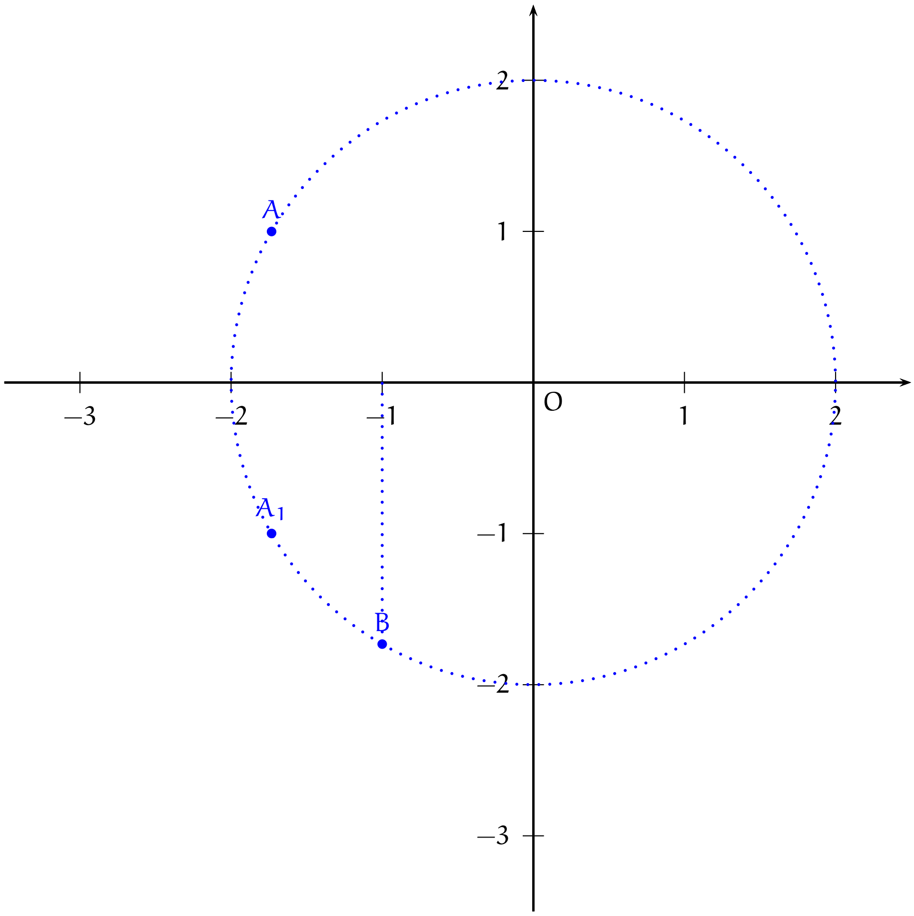
b) $z_{A_1} = \overline{\left(2e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)} = 2\overline{\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ puis

$$z_B = e^{\frac{i\pi}{6}} z_{A_1} = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{-\frac{4i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ensuite,

$$z_B = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}.}$$



2) a) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$. On en déduit que $OA = OB$ et donc que le triangle OAB est isocèle en O.

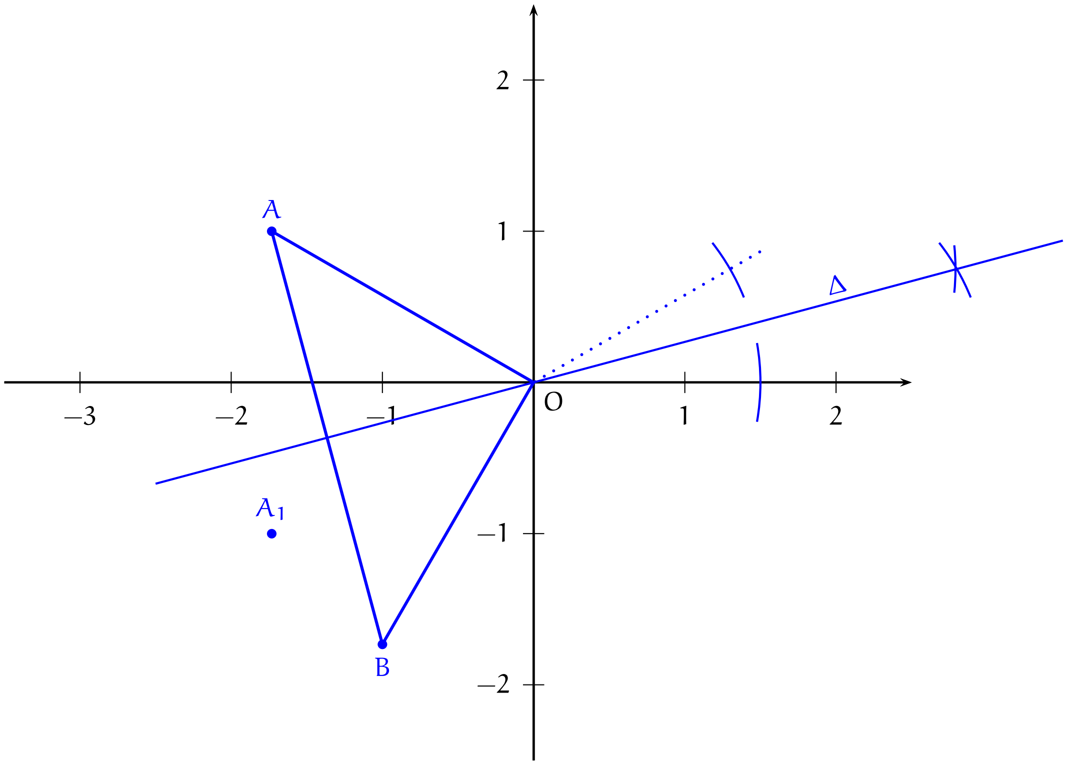
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sont $(-\sqrt{3}, 1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sont $(-1, -\sqrt{3})$.

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left(-\sqrt{3}\right) \times (-1) + 1 \times \left(-\sqrt{3}\right) = 0.$$

On en déduit que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires et donc que le triangle OAB est rectangle en O.

Finalement, le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b) Pour construire Δ, on construit au compas la bissectrice d'un angle de mesure $\dfrac{\pi}{6}$.



c) $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)=-\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)=-\arg\left(z_A\right)+\arg\left(z_{\overrightarrow{w}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right)\ [2\pi]$.

On admet que $\left(\overrightarrow{w},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right)\ [2\pi]$.

d) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ est $e^{\frac{i\pi}{12}}$ puis

- $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{w}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}\right)=\arg\left(\dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6}\right)}\right)=\arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right)=\arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{w},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right)=\arg\left(\dfrac{2e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{12}}}\right)=\arg\left(2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)}\right)=\arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right)=\arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Donc, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{w},\overrightarrow{OB}\right)$. Ceci montre que la droite Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

Puisque le triangle OAB est isocèle en O d'après la question 2)a), la droite Δ est également la médiatrice du segment [AB]. On en déduit que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3) $z_{B_1}=\overline{\left(2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}=2\overline{\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$z_{B'}=e^{\frac{i\pi}{6}}z_{B_1}=e^{\frac{i\pi}{6}}\times 2e^{\frac{2i\pi}{3}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{5i\pi}{6}}=z_A,$$

et donc $B'=A$.

4) $|z_C|=\sqrt{2}\times\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ puis

$$z_C=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Le point O appartient à la droite Δ. Donc, O est le symétrique de O par rapport à Δ. Comme d'autre part, D est le symétrique de C par rapport à Δ, on a

$$OD=OC=|z_C|=2.$$

Posons alors $z_D=2e^{i\theta}$ où $\theta\in\mathbb{R}$. On a $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OD}\right)=\theta\ [2\pi]$. Puisque D est le symétrique de C par rapport à la droite Δ, la droite Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$. Mais alors $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{w},\overrightarrow{OD}\right)$. Or,

- $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$,
- $\left(\overrightarrow{w},\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OD}\right)=-\dfrac{\pi}{12}+\theta\ [2\pi]$.

Par suite, $-\dfrac{\pi}{12}+\theta=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou encore $\theta=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou enfin $\theta=-\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$. Finalement,

$$\boxed{z_D=2e^{-\frac{i\pi}{12}}.}$$