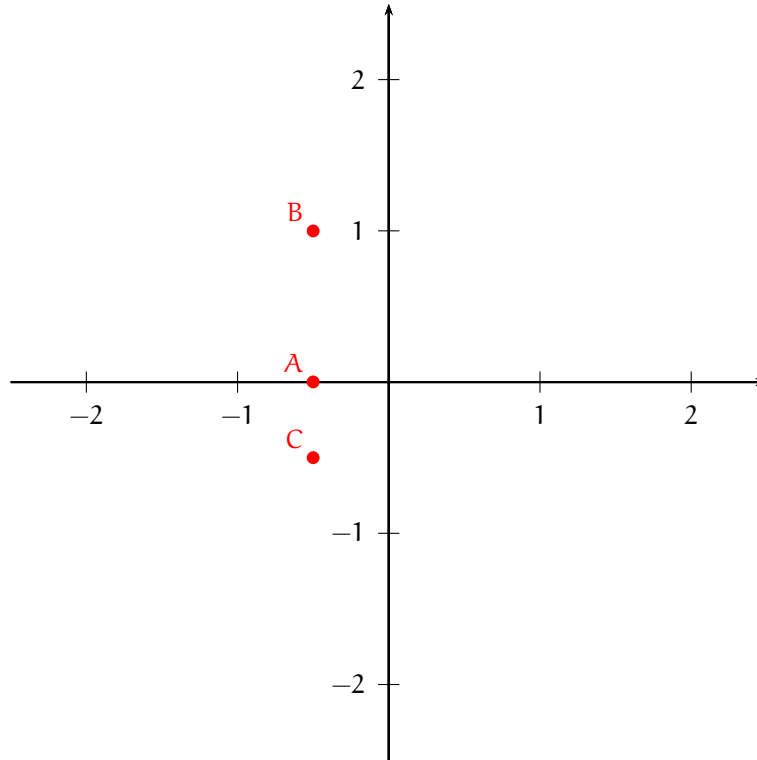


EXERCICE 4 : corrigé

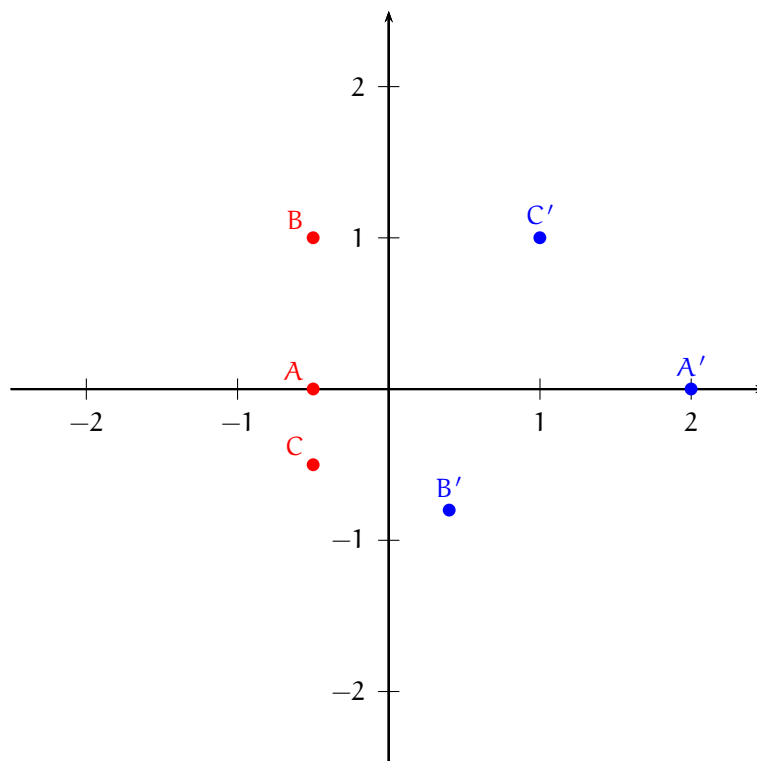
1) a) Graphique.



$$b) \bullet z_{A'} = \frac{1}{z_A + 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

$$\bullet z_{B'} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + i} = \frac{2}{1 + 2i} = \frac{2(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - 4i}{1^2 + 2^2} = \frac{2 - 4i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

$$\bullet z_{C'} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{1^2 + (-1)^2} = 1 + i.$$



c) Les points A' , B' et C' ont pour coordonnées respectives $(2, 0)$, $(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ et $(1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées $(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$ et le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées $(-1, 1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$, alors $-k = -\frac{8}{5}$ et aussi $k = -\frac{4}{5}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires ou encore

les points A' , B' et C' ne sont pas alignés.

2) a) Soit M un point de \mathcal{D} . Les coordonnées de M sont de la forme $(-\frac{1}{2}, y)$ où y est un réel.

L'affixe du point M est $z_M = -\frac{1}{2} + iy$ puis l'affixe de M_1 est

$$z_{M_1} = z_M + 1 = -\frac{1}{2} + iy + 1 = \frac{1}{2} + iy.$$

$x_{M_1} = \frac{1}{2}$ et donc M_1 appartient à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Ainsi, l'image de chaque point de \mathcal{D} est un point de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, soit M_1 un point de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Les coordonnées de M_1 sont de la forme $(\frac{1}{2}, y)$ où y est un réel.

L'affixe du point M_1 est $z_{M_1} = \frac{1}{2} + iy$. Soit M le point d'affixe $z_M = -\frac{1}{2} + iy$. Puisque $x_M = -\frac{1}{2}$, le point M appartient à la droite \mathcal{D} . D'autre part, l'affixe de $g(M)$ est

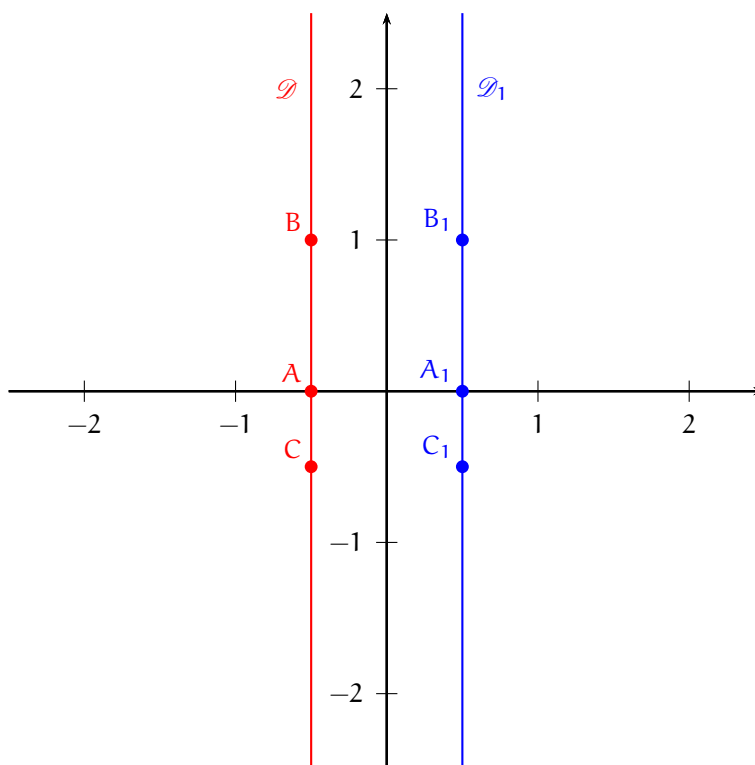
$$z_M + 1 = -\frac{1}{2} + iy + 1 = \frac{1}{2} + iy = z_{M_1},$$

et donc $g(M) = M_1$. Par suite, M_1 est l'image d'un point de \mathcal{D} par g .

Ainsi, tout point de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'image d'un point de \mathcal{D} par g .

Finalement, \mathcal{D}_1 est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

b) Les points A et B sont deux points distincts de la droite \mathcal{D} et donc \mathcal{D}_1 est la droite passant par $A_1 = g(A)$ et $B_1 = g(B)$ ou encore $\mathcal{D}_1 = (A_1B_1)$.



c) \mathcal{D}_1 est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. D'autre part, l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$ est l'ensemble des points M à égale distance des points O et Ω de coordonnées respectives $O(0,0)$ et $\Omega(1,0)$. Cet ensemble est la médiatrice du segment $[O, \Omega]$ ou encore la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ ou enfin la droite \mathcal{D}_1 .

3) a) A_1, B_1 et C_1 sont distincts de O . Donc $h(A_1), h(B_1)$ et $h(C_1)$ existent.

$z_{h(A_1)} = \frac{1}{z_{A_1}} = \frac{1}{z_A + 1} = z'_A$ et donc $h(A_1) = A'$. De même, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Soit z un nombre complexe non nul.

$$\left| \frac{1}{z} - 1 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1-z}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |-(z-1)| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|.$$

c) Soit M_1 un point de \mathcal{D}_1 dont l'affixe est notée z_1 . M_1 est distinct de O et donc $h(M_1)$ existe.

De plus, $|z_1 - 1| = |z_1|$ d'après la question 2)c) et donc $\left| \frac{1}{z_1} - 1 \right| = 1$ d'après la question 3)b). $\frac{1}{z_1}$ est l'affixe de $h(M_1)$ et donc $\Omega h(M_1) = 1$ (où $\Omega(1,0)$). Ainsi, le point $h(M_1)$ appartient au cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1.

4) Pour tout point M de \mathcal{D} , $f(M) = h(g(M))$. L'image de \mathcal{D} par g est la droite \mathcal{D}_1 et l'image de la droite \mathcal{D}_1 par h est le cercle \mathcal{C} privé du point O . Donc

l'image de \mathcal{D} par f est le cercle \mathcal{C} privé du point O .

