# Asie 2012. Enseignement spécifique

# France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

**EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$.

On appelle $f$ l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z$ différente de $-1$, fait correspondre le point $M'$ d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par $f$ de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

**1)** Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $z_B = -\dfrac{1}{2} + i$ et $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

**a)** Placer les trois points $A$, $B$ et $C$ sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

**b)** Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer les points $A'$, $B'$ et $C'$ sur la figure.

**c)** Démontrer que les points $A'$, $B'$ et $C'$ ne sont pas alignés.

**2)** Soit $g$ la transformation du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M_1$ d'affixe $z+1$.

**a)** Soit $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des images des points de la droite $\mathscr{D}$ par $g$. Montrer que $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

**b)** Placer les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$, images respectives par $g$ de $A$, $B$ et $C$ et tracer la droite $\mathscr{D}_1$.

**c)** Démontrer que $\mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ telle que $|z-1| = |z|$.

**3)** Soit $h$ l'application qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, associe le point $M_2$ d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

**a)** Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

**b)** Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul $z$, on a :

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|.$$

**c)** En déduire que l'image par $h$ le la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par $h$ de la droite $\mathscr{D}_1$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de $O$.

**4)** Déterminer l'image par l'application $f$ de la droite $\mathscr{D}$.

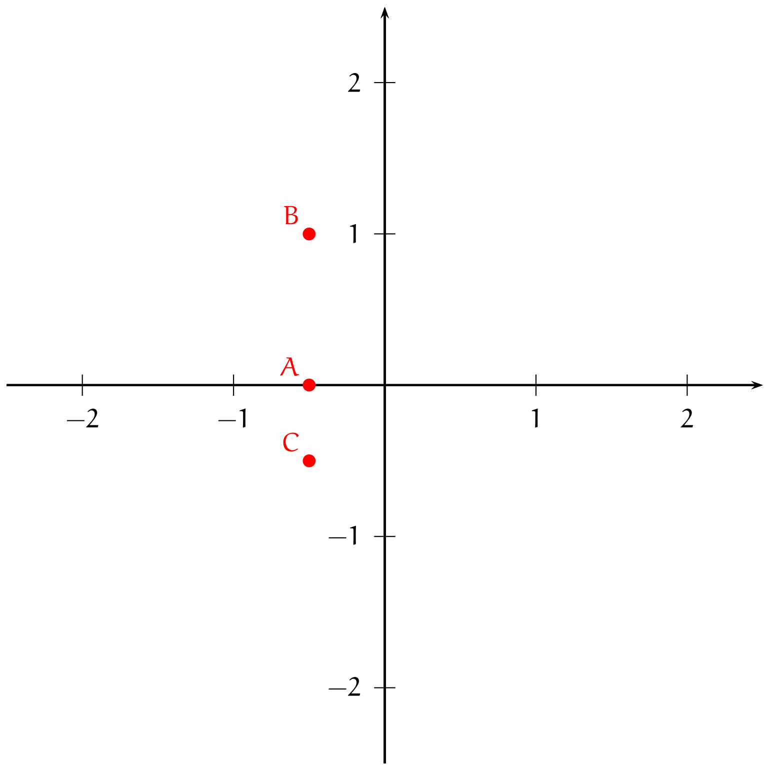
 

# Asie 2012. Enseignement spécifique

# France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

**EXERCICE 4 : corrigé**

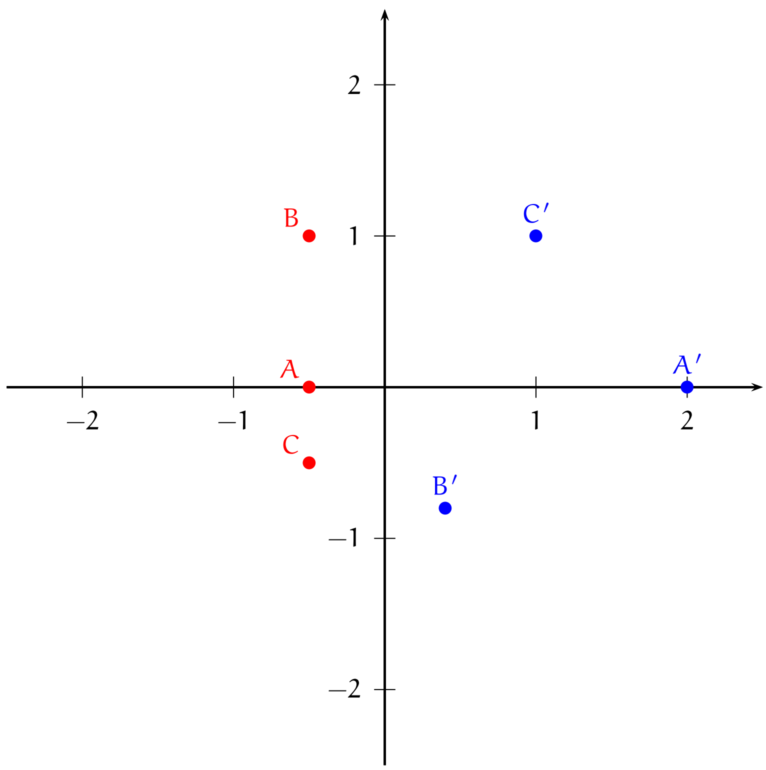
**1) a) Graphique.**




**b)** • $z_{A'} = \dfrac{1}{z_A + 1} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + 1} = \dfrac{1}{1/2} = 2.$

• $z_{B'} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + i + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + i} = \dfrac{2}{1 + 2i} = \dfrac{2(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \dfrac{2 - 4i}{1^2 + 2^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i.$

• $z_{C'} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{2}{1 - i} = \dfrac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{2(1 + i)}{1^2 + (-1)^2} = 1 + i.$



**c)** Les points $A'$, $B'$ et $C'$ ont pour coordonnées respectives $(2,0)$, $\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right)$ et $(1,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées $(-1,1)$.

S'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$, alors $-k = -\frac{8}{5}$ et aussi $k = -\frac{4}{5}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A',\ B' \text{ et } C' \text{ ne sont pas alignés.}}$$

**2) a)** Soit $M$ un point de $\mathscr{D}$. Les coordonnées de $M$ sont de la forme $\left(-\frac{1}{2},y\right)$ où $y$ est un réel.

L'affixe du point $M$ est $z_M = -\frac{1}{2} + y$ puis l'affixe de $M_1$ est

$$z_{M_1} = z_M + 1 = -\frac{1}{2} + iy + 1 = \frac{1}{2} + iy.$$

$x_{M_1} = \frac{1}{2}$ et donc $M_1$ appartient à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Ainsi, l'image de chaque point de $\mathscr{D}$ est un point de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

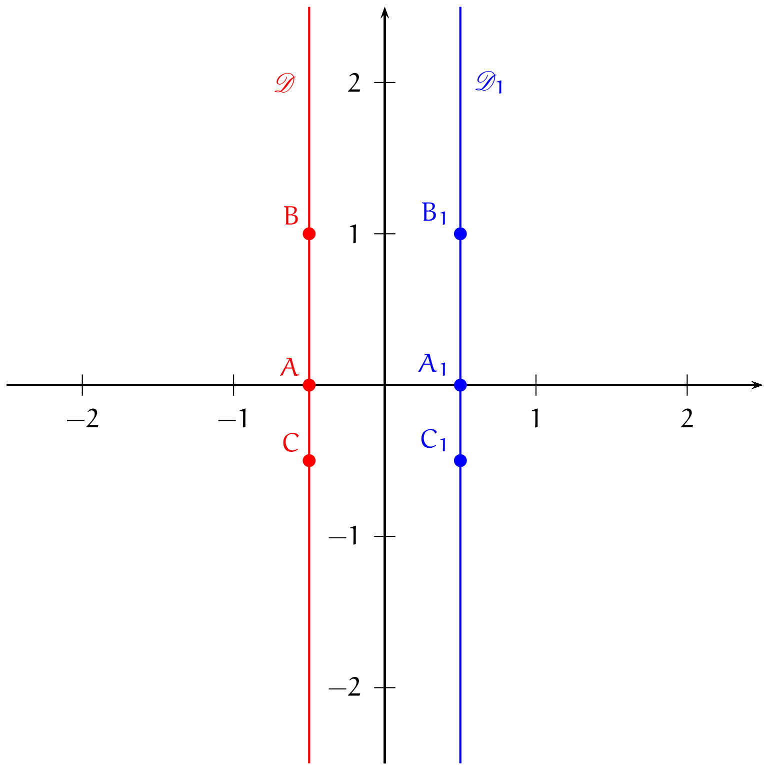
Réciproquement, soit $M_1$ un point de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Les coordonnées de $M_1$ sont de la forme $\left(\frac{1}{2},y\right)$ où $y$ est un réel.
L'affixe du point $M_1$ est $z_{M_1} = \frac{1}{2} + iy$. Soit $M$ le point d'affixe $z_M = -\frac{1}{2} + iy$. Puisque $x_M = -\frac{1}{2}$, le point $M$ appartient à la droite $\mathscr{D}$. D'autre part, l'affixe de $g(M)$ est

$$z_M + 1 = -\frac{1}{2} + iy + 1 = \frac{1}{2} + iy = z_{M_1},$$

et donc $g(M) = M_1$. Par suite, $M_1$ est l'image d'un point de $\mathscr{D}$ par $g$.
Ainsi, tout point de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'image d'un point de $\mathscr{D}$ par $g$.

Finalement, $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

**b)** Les points $A$ et $B$ sont deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$ et donc $\mathscr{D}_1$ est la droite passant par $A_1 = g(A)$ et $B_1 = g(B)$ ou encore $\mathscr{D}_1 = (A_1B_1)$.



**c)** $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ telle que $|z-1| = |z|$ est l'ensemble des points $M$ à égale distance des points $O$ et $\Omega$ de coordonnées respectives $O(0,0)$ et $\Omega(1,0)$. Cet ensemble est la médiatrice du segment $[O,\Omega]$ ou encore la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ ou enfin la droite $\mathscr{D}_1$.

**3) a)** $A_1$, $B_1$ et $C_1$ sont distincts de $O$. Donc $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ existent.

$z_{h(A_1)} = \dfrac{1}{z_{A_1}} = \dfrac{1}{z_A + 1} = z'_A$ et donc $h(A_1) = A'$. De même, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

**b)** Soit $z$ un nombre complexe non nul.

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |-(z-1)| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|.$$

**c)** Soit $M_1$ un point de $\mathscr{D}_1$ dont l'affixe est notée $z_1$. $M_1$ est distinct de $O$ et donc $h(M_1)$ existe.
De plus, $|z_1 - 1| = |z_1|$ d'après la question 2)c) et donc $\left|\dfrac{1}{z_1} - 1\right| = 1$ d'après la question 3)b). $\dfrac{1}{z_1}$ est l'affixe de $h(M_1)$ et donc $\Omega h(M_1) = 1$ (où $\Omega(1,0)$). Ainsi, le point $h(M_1)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon $1$.

**4)** Pour tout point $M$ de $\mathscr{D}$, $f(M) = h(g(M))$. L'image de $\mathscr{D}$ par $g$ est la droite $\mathscr{D}_1$ et l'image de la droite $\mathscr{D}_1$ par $h$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $O$. Donc

$$\boxed{\text{l'image de } \mathscr{D} \text{ par } f \text{ est le cercle } \mathscr{C} \text{ privé du point } O.}$$