Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$.

1) Un triangle

a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2) Une suite de nombres complexes

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

$$3 + i\sqrt{3}, \quad 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}.$$

On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} z + 2$.

d) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega).$$

où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1)b)** (on utilisera le fait que $\omega = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\omega + 2$).

e) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

f) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

1) Un triangle.

a) Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(2,0)$, $\left(3,\sqrt{3}\right)$ et $\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ et $\left(-3,\sqrt{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-1)\times(-3) + \left(-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3} = 3-3 = 0.$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et on en déduit que

$$\boxed{\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.}$$

b) Ainsi, le triangle ABC est rectangle en B. On en déduit que $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC ou encore le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment $[AC]$. Donc,

$$\omega = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\text{Le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ est le point } \Omega \text{ d'affixe } \omega = 1+i\sqrt{3}.}$$

2) Une suite de nombres complexes.

a)
- $z_1 = 0+2 = 2 = a.$
- $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 2+2 = 1+i\sqrt{3}+2 = 3+i\sqrt{3} = b.$
- $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(3+i\sqrt{3})+2 = \dfrac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{2}+2 = 2+\dfrac{4i\sqrt{3}}{2} = 2+2i\sqrt{3}.$
- $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(2+2i\sqrt{3})+2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2+2 = 1+2i\sqrt{3}-3+2 = 2i\sqrt{3} = c.$

b)
- $A_1A_2 = |z_2-z_1| = \left|3+i\sqrt{3}-2\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$
- $A_2A_3 = |z_3-z_2| = \left|2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}\right| = \left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$
- $A_3A_4 = |z_4-z_3| = \left|2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}\right| = |-2| = 2.$

$$\boxed{A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 2.}$$

c) Soit z un nombre complexe.

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+2 \Leftrightarrow z\left(1-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{2-1-i\sqrt{3}}{2}z = 2 \Leftrightarrow \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z = 2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z = \frac{4\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow z = \frac{4\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1+i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = \omega.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation proposée est } \{\omega\}.}$$

d) Puisque ω est solution de l'équation $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z+2$, on a $\omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega+2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$z_{n+1}-\omega = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2\right) - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega+2\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega-2$$
$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega).}$$

e)

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}.$$

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}.}$$

f) D'après les deux questions précédentes, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$. Donc, la suite $(z_n - \omega)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$z_{n+6} - \omega = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 (z_n - \omega) = e^{2i\pi}(z_n - \omega) = z_n - \omega$$

et donc que $z_{n+6} = z_n$. Mais alors

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ A_{n+6} = A_n.}$$

On note que $2012 = 6 \times 335 + 2$. D'après ce qui précède, $A_2 = A_{2+6} = A_{2+2\times 6} = A_{2+3\times 6} = \ldots$ et plus généralement, pour tout entier naturel n, $A_{6n+2} = A_2$. Donc, $A_{2012} = A_2$ ou encore

$$\boxed{z_{2012} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}.}$$