Pondichéry 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

Partie A

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On sait que $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et donc

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{(z_1z_2)} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2.$$

En résumé, $|z_1z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2$. Puisqu'un module est un réel positif, en prenant la racine carrée des deux membres de l'égalité précédente, on obtient $|z_1z_2| = |z_1| \times |z_2|$. On a montré que

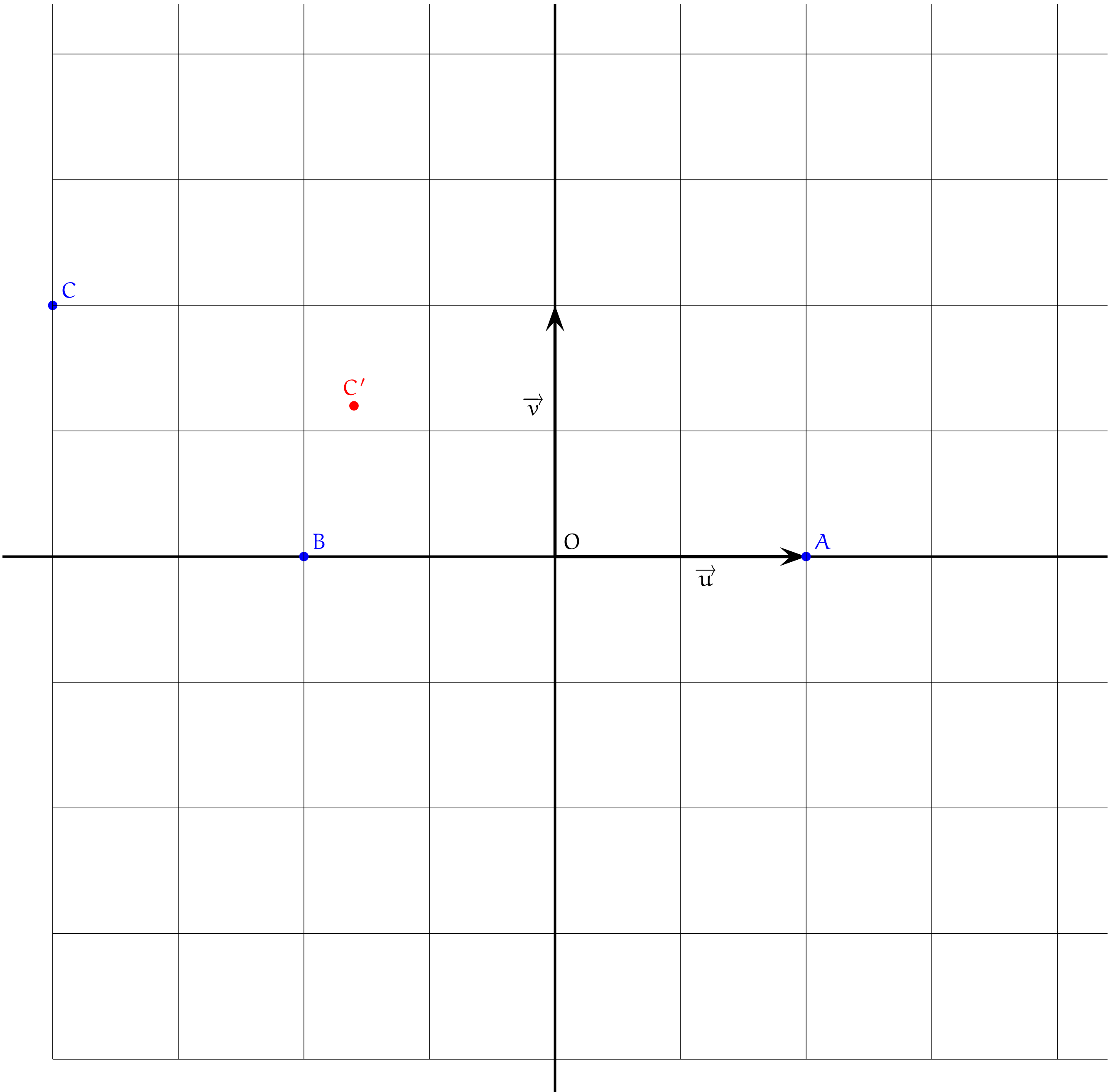
$$\boxed{\text{pour tous nombres complexes } z_1 \text{ et } z_2,\ |z_1z_2| = |z_1| \times |z_2|.}$$

Partie B

1) a)

$$z_{C'} = \frac{1 - z_C}{\overline{z_C} - 1} = \frac{1 - (-2 + i)}{(-2 - i) - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)}$$
$$= \frac{-9 + 6i + 1}{(-3)^2 + (-1)^2} = \frac{-8 + 6i}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

$$\boxed{z_{C'} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.}$$



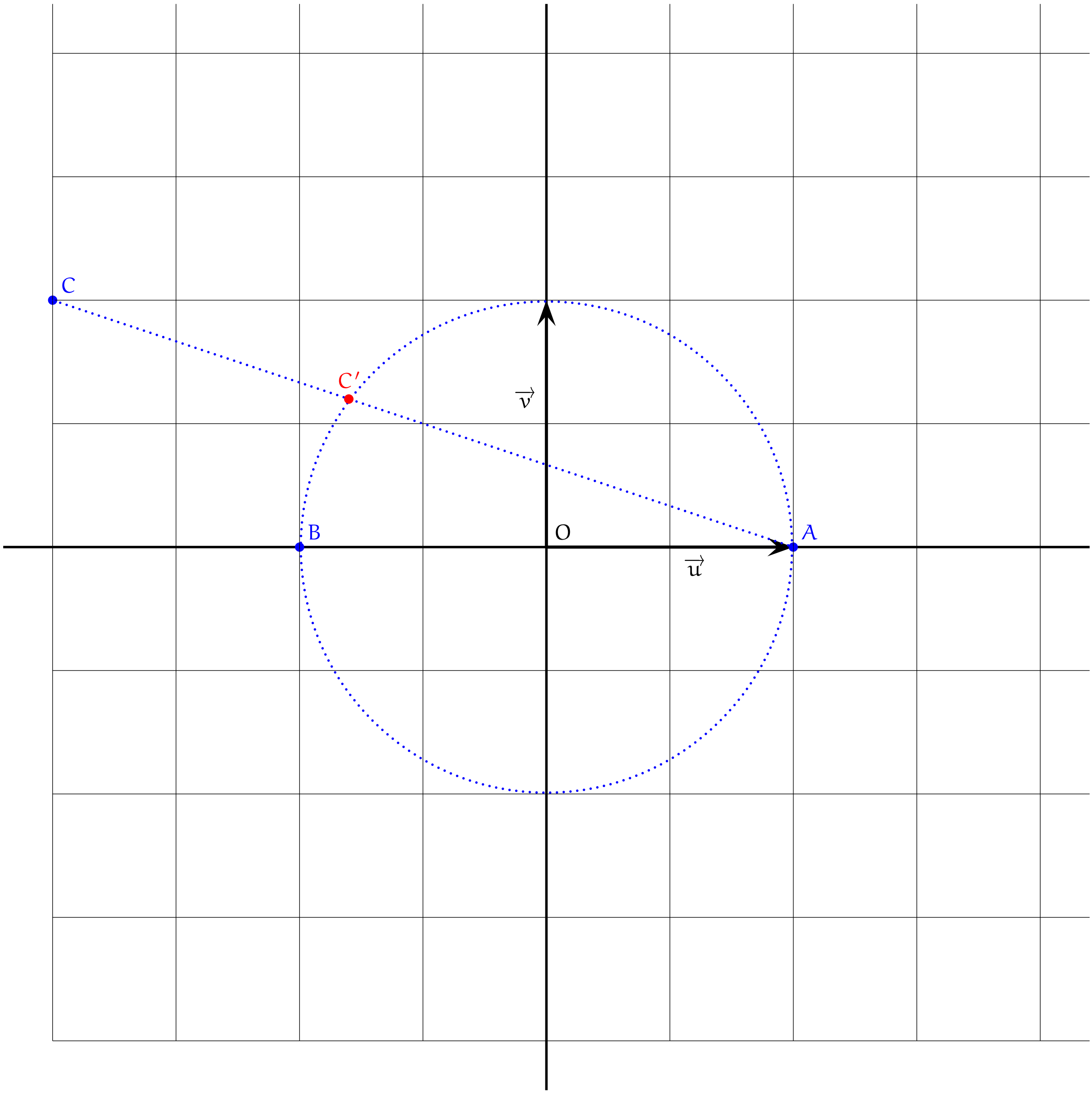
b) $OC' = |z_{C'}| = \sqrt{\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$. Donc

$$\boxed{\text{le point } C' \text{ appartient au cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$$

c) Le point A a pour coordonnées $(1, 0)$, le point C a pour coordonnées $(-2, 1)$ et le point C' a pour coordonnées $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{9}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

On en déduit que $\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires. Ceci montre que

$$\boxed{\text{les points } A, C \text{ et } C' \text{ sont alignés.}}$$



2) Soit M un point du plan distinct de A. On note z son affixe (z est donc un nombre complexe distinct de 1). Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

$$\begin{aligned} f(M) = A &\Leftrightarrow \frac{1 - z}{\overline{z} - 1} = 1 \Leftrightarrow 1 - z = \overline{z} - 1 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 2 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow x + iy + x - iy = 2 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Delta \text{ est la droite d'équation } x = 1 \text{ privée du point } A.}$$

3) Soit M un point du plan distinct de A dont l'affixe est notée z.

$$OM' = |z'| = \frac{|1-z|}{|\overline{z}-1|} = \frac{|-(z-1)|}{|\overline{z-1}|} = \frac{|z-1|}{|z-1|} = 1.$$

Donc M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ou encore M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

4) Soit z un nombre complexe distinct de 1. Posons $z = x + iy$ ou x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

$$\begin{aligned}\frac{z'-1}{z-1} &= \frac{\dfrac{1-z}{\overline{z}-1} - 1}{z-1} = \left(\frac{1-z}{\overline{z}-1} - 1\right) \times \frac{1}{z-1} = \frac{(1-z)-(\overline{z}-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{2-z-\overline{z}}{(z-1)\overline{(z-1)}} \\ &= \frac{2-(x+iy)-(x-iy)}{|z-1|^2} = \frac{2-2x}{|z-1|^2}.\end{aligned}$$

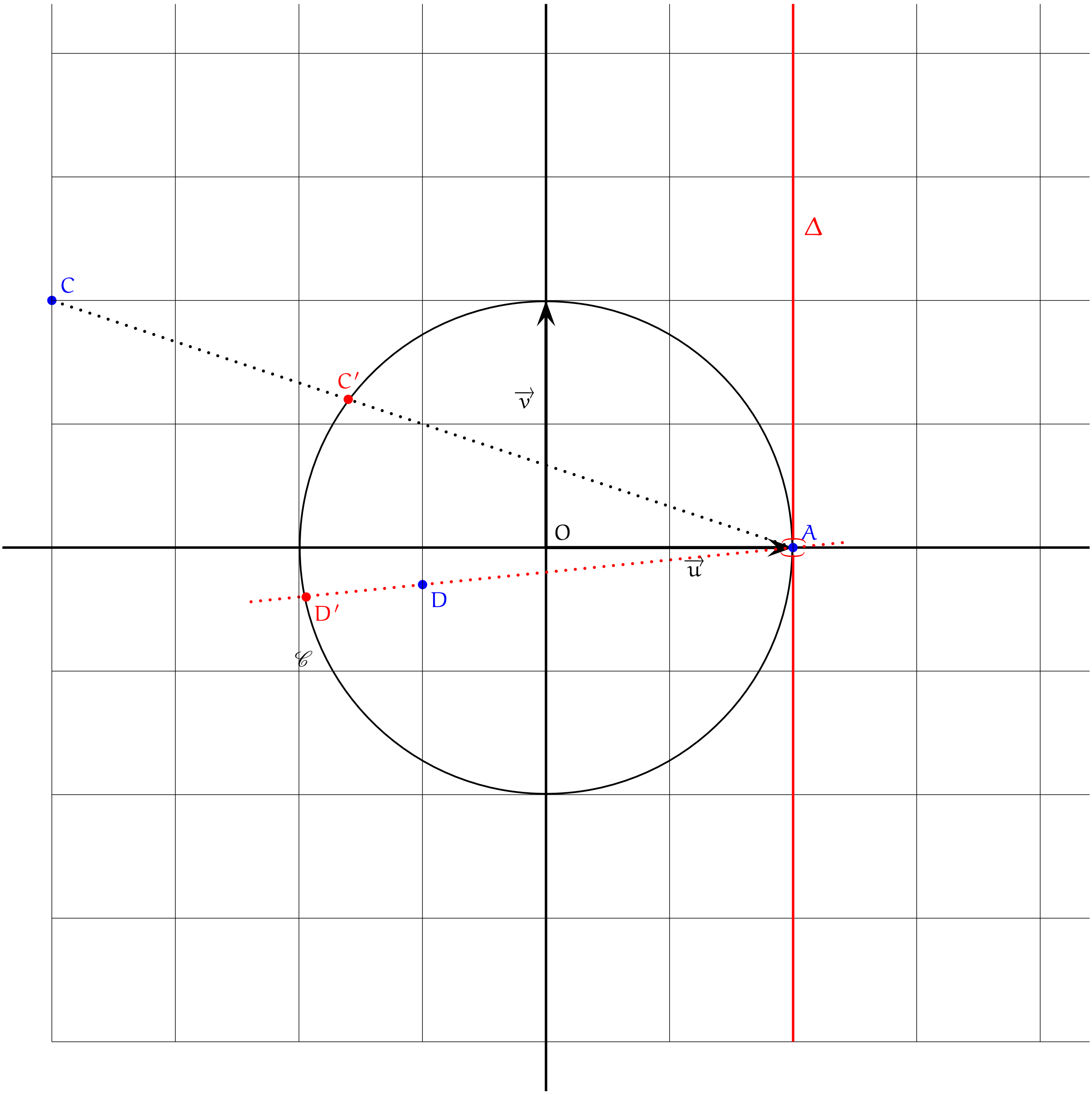
Le nombre $\dfrac{2-2x}{|z-1|^2}$ est un nombre réel et donc le nombre $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel. Notons k ce nombre réel.

$$\frac{z'-1}{z-1} = k \Rightarrow z'-1 = k(z-1) \Rightarrow z_{\overrightarrow{AM'}} = kz_{\overrightarrow{AM}} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires ou encore les points A, M et M' sont alignés.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A, \text{ le point } M' \text{ appartient à la droite } (AM).}$$

5) D'après la question 3), le point D' appartient au cercle $\mathscr{C}$. D'après la question 4), le point D' appartient à la droite (AD) et d'après la question 2), le point D' n'est pas le point A puisque le point D n'appartient pas à Δ.
D' est donc le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle $\mathscr{C}$ autre que le point A.



Δ
C
C′
$\overrightarrow{v}$
O
A
$\overrightarrow{u}$
D
D′
$\mathscr{C}$

