Pondichéry 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A **Restitution organisée de connaissances**

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z.
On admet l'égalité $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Partie B **Étude d'une transformation particulière**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}.$$

1) Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné en **annexe**.

b) Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2) Déterminer et représenter sur la figure donnée en **annexe** l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3) Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

4) Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

5) On a placé un point D sur la figure donnée en **annexe**. Construire son image D' par la transformation f.

Annexe à rendre avec la copie