

Pondichéry 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que \bar{z} est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z .
On admet l'égalité $|z|^2 = z\bar{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

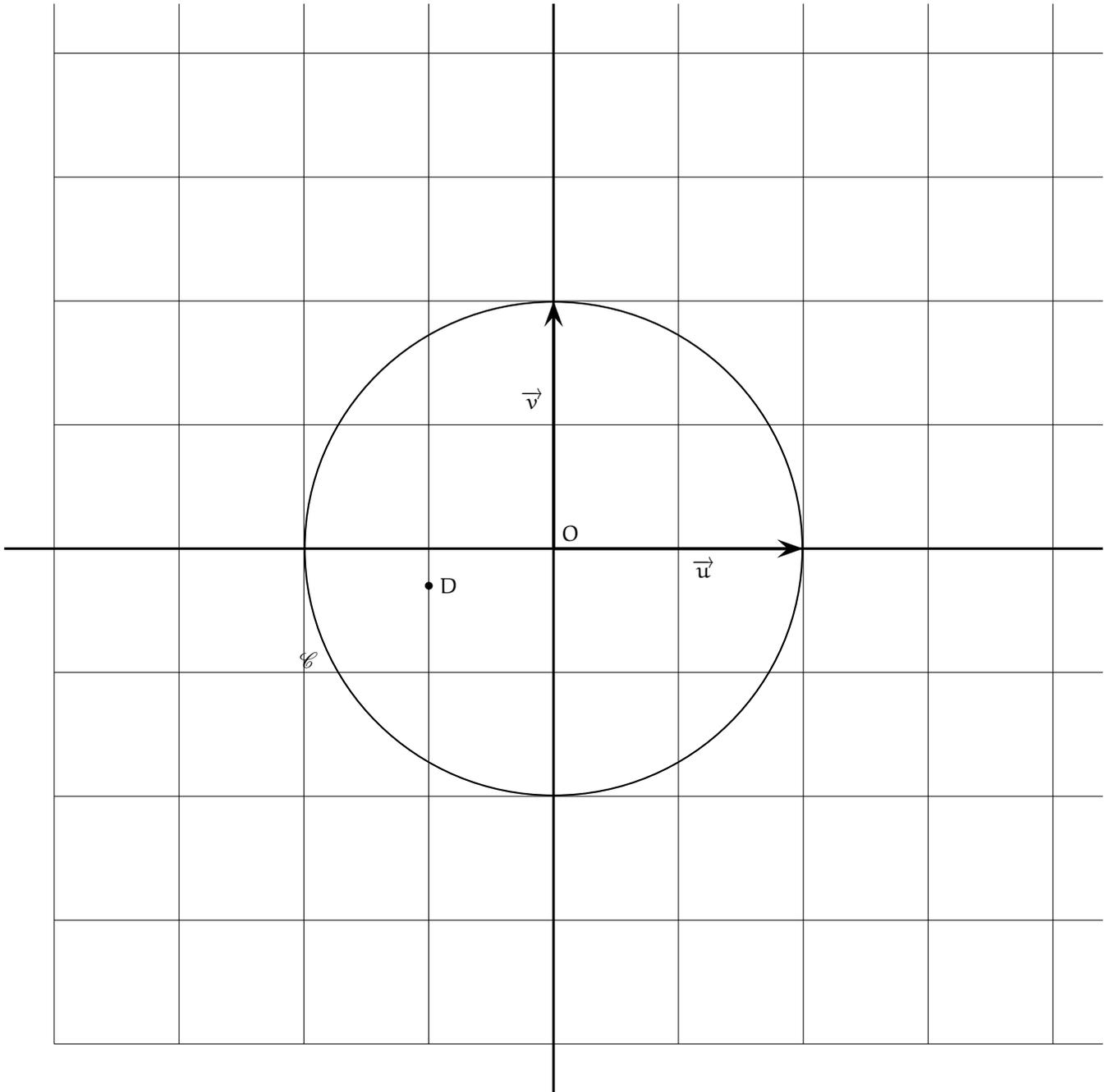
Partie B Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}.$$

- 1) Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
 - a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f , et placer les points C et C' dans le repère donné en **annexe**.
 - b) Montrer que le point C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 .
 - c) Montrer que les points A , C et C' sont alignés.
- 2) Déterminer et représenter sur la figure donnée en **annexe** l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f .
- 3) Montrer que, pour tout point M distinct de A , le point M' appartient au cercle \mathcal{C} .
- 4) Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.
Que peut-on en déduire pour les points A , M et M' ?
- 5) On a placé un point D sur la figure donnée en **annexe**. Construire son image D' par la transformation f .



Pondichéry 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

Partie A

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On sait que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et donc

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{(z_1 z_2)} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2.$$

En résumé, $|z_1 z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2$. Puisqu'un module est un réel positif, en prenant la racine carrée des deux membres de l'égalité précédente, on obtient $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$. On a montré que

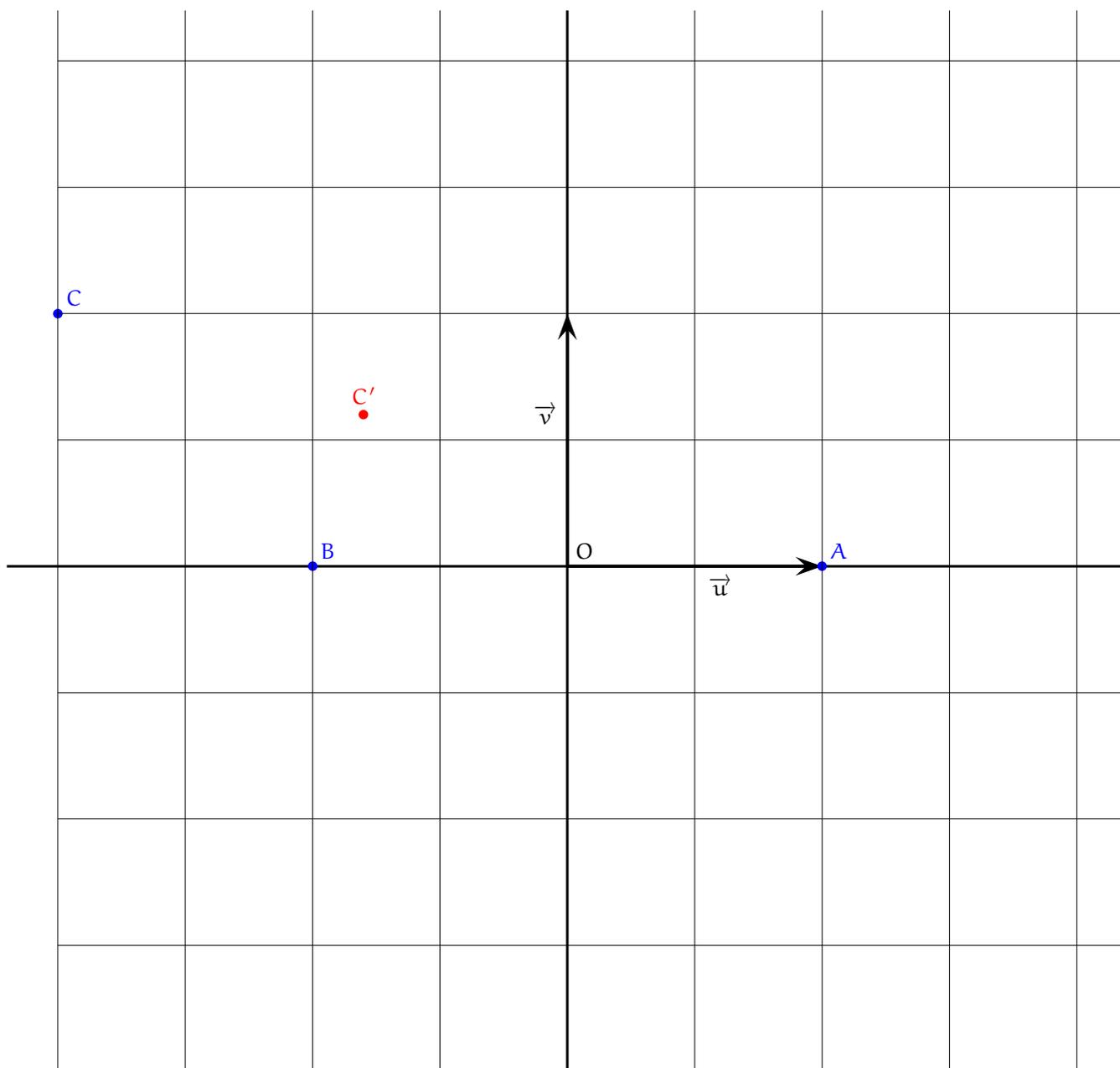
$$\text{pour tous nombres complexes } z_1 \text{ et } z_2, |z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|.$$

Partie B

1) a)

$$\begin{aligned} z_{C'} &= \frac{1 - z_C}{\overline{z_C} - 1} = \frac{1 - (-2 + i)}{(-2 - i) - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} \\ &= \frac{-9 + 6i + 1}{(-3)^2 + (-1)^2} = \frac{-8 + 6i}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

$$z_{C'} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$



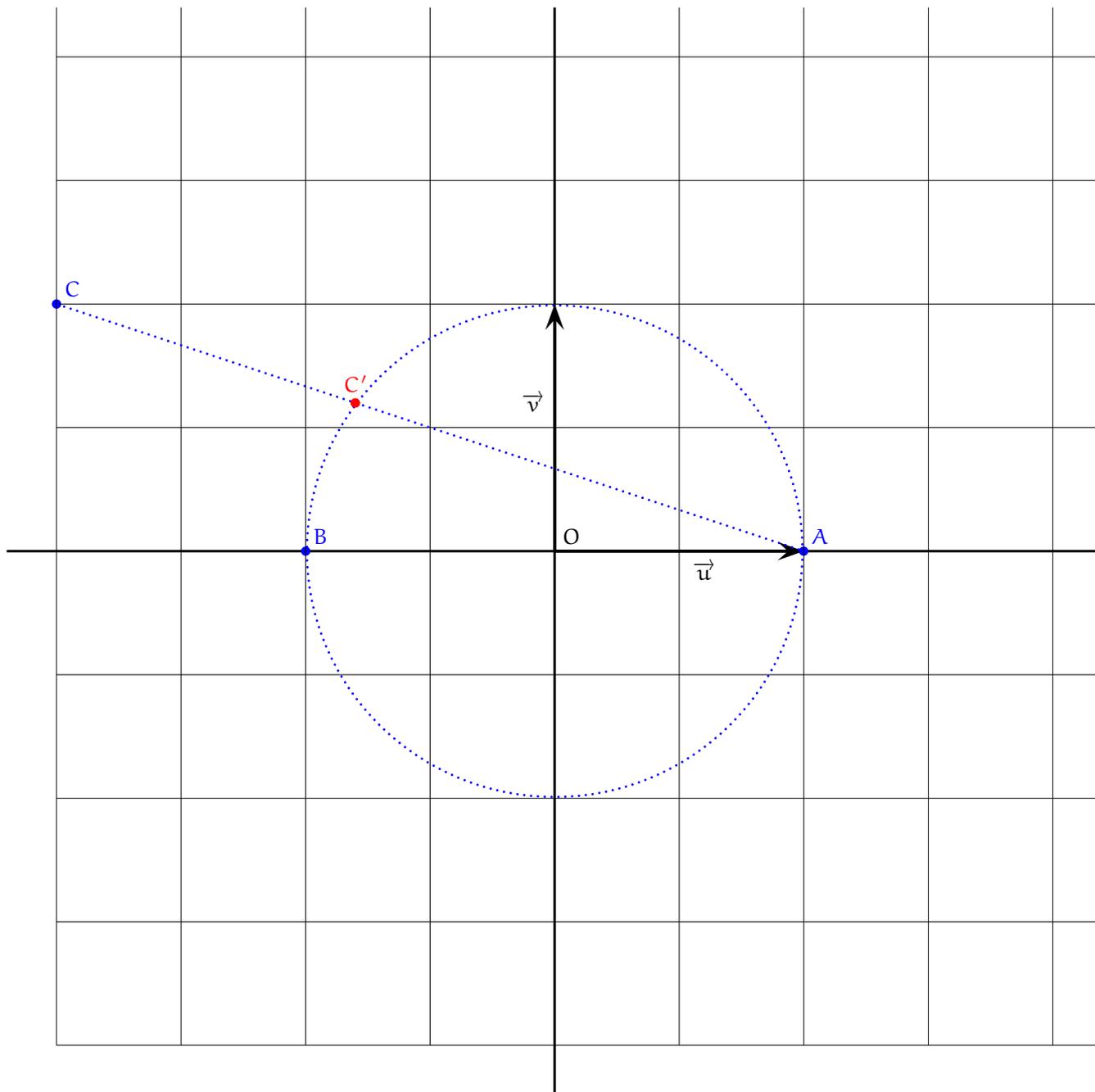
b) $OC' = |z_{C'}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$. Donc

le point C' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

c) Le point A a pour coordonnées $(1, 0)$, le point C a pour coordonnées $(-2, 1)$ et le point C' a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Par suite, le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-3, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

On en déduit que $\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$ et donc les vecteurs \overrightarrow{AC} et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires. Ceci montre que

les points A , C et C' sont alignés.



2) Soit M un point du plan distinct de A . On note z son affixe (z est donc un nombre complexe distinct de 1). Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

$$\begin{aligned} f(M) = A &\Leftrightarrow \frac{1-z}{\bar{z}-1} = 1 \Leftrightarrow 1-z = \bar{z}-1 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow z + \bar{z} = 2 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow x + iy + x - iy = 2 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \end{aligned}$$

L'ensemble Δ est la droite d'équation $x = 1$ privée du point A .

3) Soit M un point du plan distinct de A dont l'affixe est notée z .

$$OM' = |z'| = \frac{|1-z|}{|\bar{z}-1|} = \frac{|-(z-1)|}{|z-1|} = \frac{|z-1|}{|z-1|} = 1.$$

Donc M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ou encore M' appartient au cercle \mathcal{C} .

4) Soit z un nombre complexe distinct de 1 . Posons $z = x + iy$ ou x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{z'-1}{z-1} &= \frac{1-z}{\bar{z}-1} - 1 = \left(\frac{1-z}{\bar{z}-1} - 1 \right) \times \frac{1}{z-1} = \frac{(1-z) - (\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{2-z-\bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)} \\ &= \frac{2-(x+iy)-(x-iy)}{|z-1|^2} = \frac{2-2x}{|z-1|^2}. \end{aligned}$$

Le nombre $\frac{2-2x}{|z-1|^2}$ est un nombre réel et donc le nombre $\frac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel. Notons k ce nombre réel.

$$\frac{z'-1}{z-1} = k \Rightarrow z' - 1 = k(z-1) \Rightarrow z_{\overrightarrow{AM}} = kz_{\overrightarrow{AM}} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires ou encore les points A , M et M' sont alignés.

Pour tout point M distinct de A , le point M' appartient à la droite (AM) .

5) D'après la question 3), le point D' appartient au cercle \mathcal{C} . D'après la question 4), le point D' appartient à la droite (AD) et d'après la question 2), le point D' n'est pas le point A puisque le point D n'appartient pas à Δ . D' est donc le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle \mathcal{C} autre que le point A .

