Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2.$$

On note Ω le point d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2) Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

a) Exprimer a sous forme exponentielle.

b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

4) On note B le point d'affixe -1. On admet que si $M \neq \Omega$ et $M \neq B$, M' est distinct de Ω.
On souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω et de B pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.

a) Montrer que pour tout point M distinct de Ω et de B, $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right)$ $[2\pi]$.

b) En déduire que M est un point de Γ_3 si et seulement si $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.

d) Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$.

e) En déduire l'ensemble Γ_3.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.