Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2.$$

On note Ω le point d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2) Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

a) Exprimer a sous forme exponentielle.

b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

4) On note B le point d'affixe -1. On admet que si $M \neq \Omega$ et $M \neq B$, M' est distinct de Ω.
On souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω et de B pour lesquels le triangle $\Omega M M'$ est rectangle isocèle direct en Ω.

a) Montrer que pour tout point M distinct de Ω et de B, $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right)$ $[2\pi]$.

b) En déduire que M est un point de Γ_3 si et seulement si $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.

d) Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$.

e) En déduire l'ensemble Γ_3.

Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

1) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \Leftrightarrow M = O \text{ ou } M = \Omega.$$

$$\boxed{\Gamma_1 = \{O, \Omega\}.}$$

2) a) $|a| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$ puis

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{-i\pi/4}.$$

$$\boxed{a = 2e^{-i\pi/4}.}$$

b) $f(O) = O$ et donc $f(O) \neq A$. Soit M un point du plan distinct de O d'affixe $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(M) = A &\Leftrightarrow z^2 = a \Leftrightarrow |z^2| = |a| \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z^2) = \arg(a) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 2 \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 2\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z) = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{-i\pi/8} \text{ ou } z = -\sqrt{2}e^{-i\pi/8} \text{ (car bien sûr, } z^2 = a \Leftrightarrow (-z)^2 = a). \end{aligned}$$

Les affixes des deux antécédents du point A sont $\sqrt{2}e^{-i\pi/8}$ et $-\sqrt{2}e^{-i\pi/8}$.

3) Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Par suite,

$$z' \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x.$$

$$\boxed{\Gamma_2 \text{ est la réunion des deux droites d'équations respectives } y = x \text{ et } y = -x.}$$

4) a) Soit M un point du plan distinct de Ω et de B dont l'affixe est notée z. Puisque M' est distinct de Ω, $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ existe et

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) &= \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \\ &= -\arg(z - \omega) + \arg(z' - \omega) = \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \ [2\pi]. \end{aligned}$$

b) Soit M un point du plan distinct de Ω et de B.

$$\begin{aligned} \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] &\Leftrightarrow \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \Omega M M' \text{ est rectangle, isocèle, direct en } \Omega. \end{aligned}$$

c) Soit M un point du plan distinct de Ω et de B.

$$\begin{aligned} \Omega M M' \text{ est rectangle, isocèle, direct en } \Omega &\Leftrightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = i \Leftrightarrow \frac{z^2 - 1}{z - 1} = i \\ &\Leftrightarrow z^2 - 1 = i(z - 1) \text{ (car } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow z^2 - 1 = iz - i \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0. \end{aligned}$$

d) Soit z un nombre complexe.

$$(z-1)(z+1-i) = z^2 - z + (1-i)z - (1-i) = z^2 - iz - 1 + i.$$

e) Soit M un point du plan distinct de Ω et de B. D'après les deux questions précédentes

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow (z-1)(z+1-i) = 0 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z = -1 + i.$$

$$\boxed{\Gamma_3 = \{C\} \text{ où } z_C = -1 + i.}$$

Commentaire. L'énoncé est mauvais. Si on reprend le calcul à partir de la question c) :

$$\frac{z^2-1}{z-1} = i \Leftrightarrow \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} = i \Leftrightarrow z+1 = i \Leftrightarrow z = -1 + i.$$

