Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

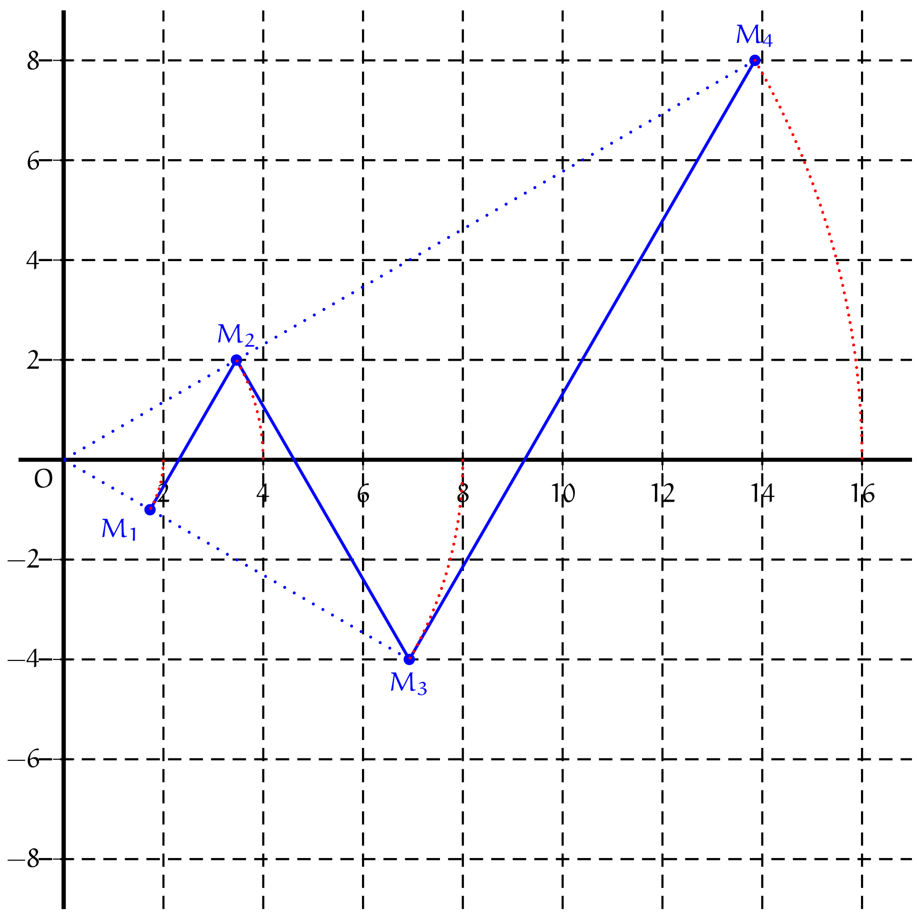
L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} - i$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont } \sqrt{3} + i \text{ et } \sqrt{3} - i.}$$

2) a) $z_1 = 2^1 e^{i(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$. Donc, z_1 est l'une des deux solutions de (E).

b) $z_2 = 2^2 e^{i(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8e^{-i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} - 4i$.

c) Graphique. $|z_1| = 2$, $|z_2| = 4$, $|z_3| = 8$ et $|z_4| = 16$. Donc les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont sur les cercles de centre O et de rayons respectifs 2, 4, 8 et 16.
Ensuite, z_1 et z_3 ont pour argument $-\dfrac{\pi}{6}$ ou encore $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. En particulier, les points O, M_1 et M_3 sont alignés. De même, les points O, M_2 et M_4 sont alignés.



3) Soit n un entier naturel non nul.

$$z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left(\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right)\right).$$

• Si n est un entier pair, $(-1)^n = 1$ puis

$$\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

• Si n est un entier impair, $(-1)^n = -1$ puis

$$\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

Dans tous les cas, $\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}$ et on a donc montré que pour tout entier naturel non nul n

$$z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right).$$

4) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right| = \left|\sqrt{3} + 3i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$

et $M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right| = \left|2\sqrt{3} - 6i\right| = 2\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$

5) a) La suite $\left(2^n\sqrt{3}\right)_{n\geqslant 1}$ est la suite géométrique de premier terme $2\sqrt{3}$ et de raison $2 \neq 1$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
\ell_n &= 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \ldots + 2^n\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times \frac{1-2^n}{1-2} \text{ (car } 2 \neq 1)\\
&= 2\sqrt{3} \times \frac{2^n - 1}{2-1} = 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ \ell_n = 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right).}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
\ell_n \geqslant 1000 &\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right) \geqslant 1000 \Leftrightarrow 2^n - 1 \geqslant \frac{1000}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2^n \geqslant \frac{500}{\sqrt{3}} + 1\\
&\Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}} + 1\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}} + 1\right)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2} \text{ (car } \ln 2 > 0)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 8,1\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le plus entier naturel } n \text{ tel que } \ell_n \geqslant 1\,000 \text{ est } 9.}$$

