Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\,000$.

ANNEXE
À rendre avec la copie

Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité