Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

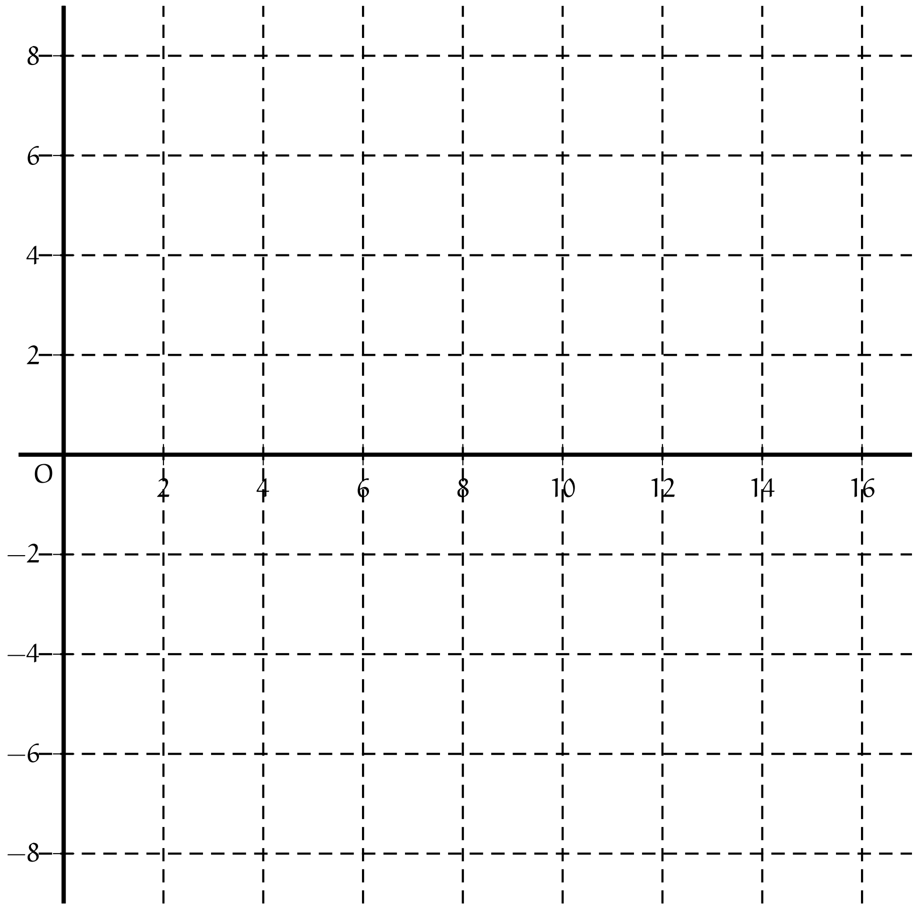
a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\,000$.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

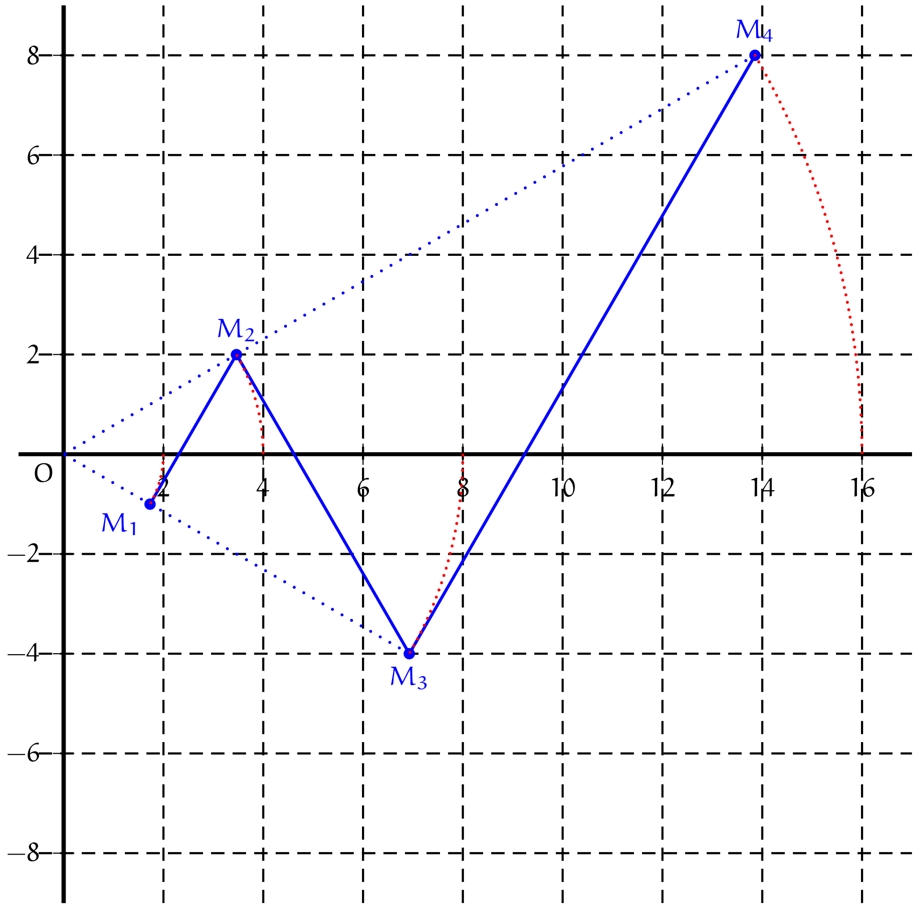
L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} - i$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont } \sqrt{3} + i \text{ et } \sqrt{3} - i.}$$

2) a) $z_1 = 2^1 e^{i(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$. Donc, z_1 est l'une des deux solutions de (E).

b) $z_2 = 2^2 e^{i(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8e^{-i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} - 4i$.

c) Graphique. $|z_1| = 2$, $|z_2| = 4$, $|z_3| = 8$ et $|z_4| = 16$. Donc les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont sur les cercles de centre O et de rayons respectifs 2, 4, 8 et 16.
Ensuite, z_1 et z_3 ont pour argument $-\dfrac{\pi}{6}$ ou encore $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. En particulier, les points O, M_1 et M_3 sont alignés. De même, les points O, M_2 et M_4 sont alignés.



3) Soit n un entier naturel non nul.

$$z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left(\cos\left(\frac{(-1)^n \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{(-1)^n \pi}{6}\right)\right).$$

• Si n est un entier pair, $(-1)^n = 1$ puis

$$\cos\left(\frac{(-1)^n \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{(-1)^n \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

• Si n est un entier impair, $(-1)^n = -1$ puis

$$\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}.$$

Dans tous les cas, $\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}$ et on a donc montré que pour tout entier naturel non nul n

$$z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}\right).$$

4) $M_1M_2=|z_2-z_1|=\left|4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\right|=\left|\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$

et $M_2M_3=|z_3-z_2|=\left|8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right|=\left|2\sqrt{3}-6i\right|=2\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}.$

5) a) La suite $\left(2^n\sqrt{3}\right)_{n\geqslant 1}$ est la suite géométrique de premier terme $2\sqrt{3}$ et de raison $2\neq 1$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}\ell_n&=2\sqrt{3}+2^2\sqrt{3}+\ldots+2^n\sqrt{3}=2\sqrt{3}\times\frac{1-2^n}{1-2}\ \text{(car } 2\neq 1\text{)}\\&=2\sqrt{3}\times\frac{2^n-1}{2-1}=2\sqrt{3}\left(2^n-1\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\geqslant 1,\ \ell_n=2\sqrt{3}\left(2^n-1\right).}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}\ell_n\geqslant 1000&\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)\geqslant 1000\Leftrightarrow 2^n-1\geqslant\frac{1000}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2^n\geqslant\frac{500}{\sqrt{3}}+1\\&\Leftrightarrow \ln\left(2^n\right)\geqslant\ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}}+1\right)\ \text{(par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[\text{)}\\&\Leftrightarrow n\ln 2\geqslant\ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}}+1\right)\\&\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}}+1\right)}{\ln 2}\ \text{(car } \ln 2>0\text{)}\\&\Leftrightarrow n\geqslant 8,1\ldots\\&\Leftrightarrow n\geqslant 9\ \text{(car } n \text{ est un entier).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le plus entier naturel } n \text{ tel que } \ell_n\geqslant 1\,000 \text{ est } 9.}$$

