Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

Partie A

1) $a_0 = \text{Re}(z_0) = 1$ et $b_0 = \text{Im}(z_0) = 1$.

2) $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1 + i + \sqrt{2}}{3} = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i,$$

et donc $a_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3) a) Tableau.

K	A	B
1	0, 8047	0, 3333
2	0, 5586	0, 1111

b) Pour un nombre N donné, l'algorithme affiche la valeur de a_N.

Partie B

1) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + i\frac{b_n}{3}.$$

Puisque $\dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $\dfrac{b_n}{3}$ sont des réels, on en déduit que $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$.

2) La suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$. On sait que pour tout entier naturel n,

$$b_n = b_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}| &= \left|\frac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \frac{|z_n + |z_n||}{|3|} = \frac{|z_n + |z_n||}{3} \\
&\leqslant \frac{|z_n| + ||z_n||}{3} = \frac{|z_n| + |z_n|}{3} \text{ (car } |z_n| \text{ est un réel positif)} \\
&= \frac{2\,|z_n|}{3}.
\end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

- $u_0 = |z_0| = \sqrt{2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$. En particulier, $u_0 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= |z_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{2|z_n|}{3} \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2}{3}u_n \\
&\leqslant \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

c) Soit n un entier naturel n.

$$u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

et donc $|a_n| \leqslant u_n$.

A partir de la question précédente, on en déduit encore que pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

Puisque $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.