

# Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite  $(z_n)$  à termes complexes définie par  $z_0 = 1 + i$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $z_n = a_n + ib_n$ , où  $a_n$  est la partie réelle de  $z_n$  et  $b_n$  est la partie imaginaire de  $z_n$ .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

### Partie A

1) Donner  $a_0$  et  $b_0$ .

2) Calculer  $z_1$ , puis en déduire que  $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$  et  $b_1 = \frac{1}{3}$ .

3) On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	A et B des nombres réels K et N des nombres entiers
<b>Initialisation :</b>	Affecter à A la valeur 1 Affecter à B la valeur 1
<b>Traitement :</b>	Entrer la valeur de N Pour K variant de 1 à N Affecter à A la valeur $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$ Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$ FinPour Afficher A

a) On exécute cet algorithme en saisissant  $N = 2$ . Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à  $10^{-4}$  près).

K	A	B
1		
2		

b) Pour un nombre  $N$  donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

### Partie B

1) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

En déduire l'expression de  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ , et l'expression de  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

2) Quelle est la nature de la suite  $(b_n)$  ? En déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ , et déterminer la limite de  $(b_n)$ .

3) a) On rappelle que pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}.$$

b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

- c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|a_n| \leq u_n$ . En déduire que la suite  $(a_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.