

Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$

$$Z_M = 1 - i\sqrt{3}.$$

b) $Z_{M'} = -iZ_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i.$

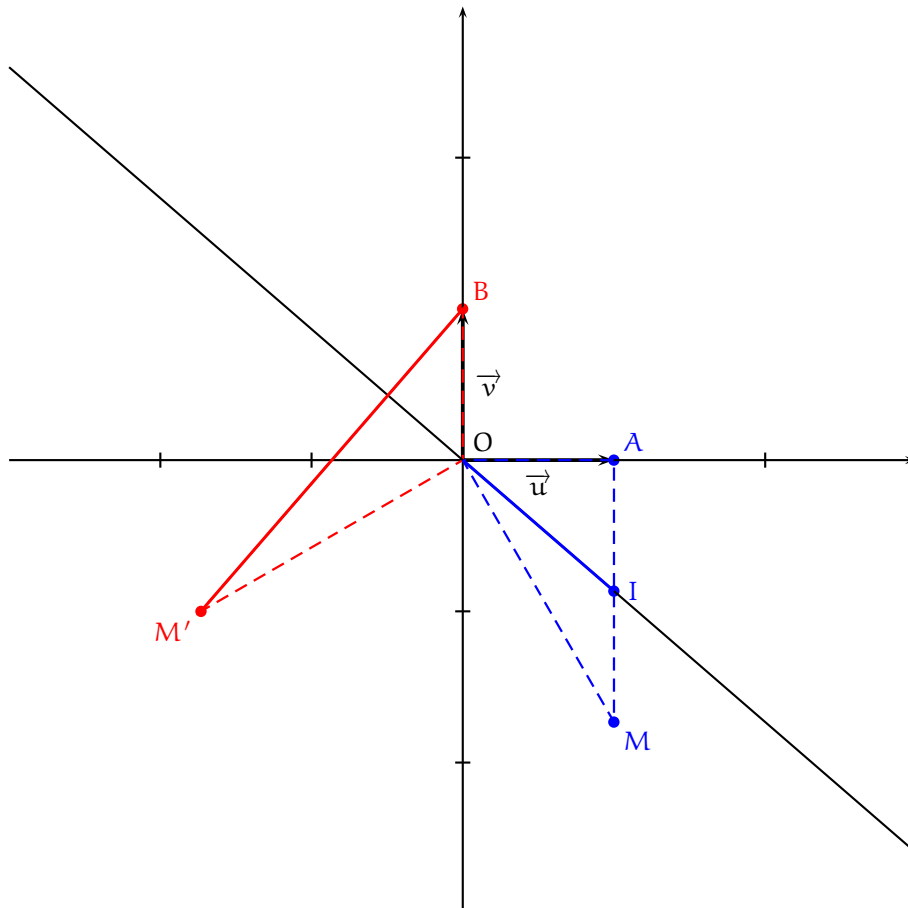
$$Z_{M'} = -\sqrt{3} - i.$$

$|Z_{M'}| = |-\sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$Z_{M'} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 2e^{-5i\pi/6}.$$

$$\text{Le module de } Z_{M'} \text{ est } 2 \text{ et un argument de } Z_{M'} \text{ est } -\frac{5\pi}{6}.$$

c) La droite (OI) semble être perpendiculaire à la droite (BM') et la distance BM' semble être le double de la distance OI.



2) On pose $Z_M = x + iy$ avec x et y réels tels que $y \neq 0$.

a) $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_M) = \frac{1}{2}(1 + x + iy) = \frac{1+x}{2} + i \frac{y}{2}.$

$$Z_I = \frac{1+x}{2} + i \frac{y}{2}.$$

b) $z_{M'} = -iz_M = -i(x + iy) = y - ix.$

$$Z_{M'} = y - ix.$$

c) Les coordonnées des points I, B et M' sont respectivement $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $(0, 1)$ et $(y, -x)$.

d) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OI} sont $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM'}$ sont $(y, -x-1)$. Par suite,

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = \frac{1+x}{2} \times y + \frac{y}{2} \times (-x-1) = \frac{(1+x)y - y(1+x)}{2} = 0.$$

Donc, la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (BM') ou encore

la droite (OI) est la hauteur issue de O du triangle OBM'.

e) $BM'^2 = \|\overrightarrow{BM'}\|^2 = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (-(x+1))^2 = (x+1)^2 + y^2.$

$$OI^2 = \|\overrightarrow{OI}\|^2 = \frac{1}{4} ((x+1)^2 + y^2).$$

Donc, $BM'^2 = 4OI^2$ et finalement

$$BM' = 2OI.$$