Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$.

A tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1) Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de Z_M.

b) Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$.

c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique. Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2) On revient au cas général en prenant $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e) Montrer que $BM' = 2OI$.

