Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$.

A tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1) Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de Z_M.

b) Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$.

c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique. Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2) On revient au cas général en prenant $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e) Montrer que $BM' = 2OI$.

Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{Z_M = 1 - i\sqrt{3}.}$$

b) $Z_{M'} = -iZ_M = -i\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3} - i$.

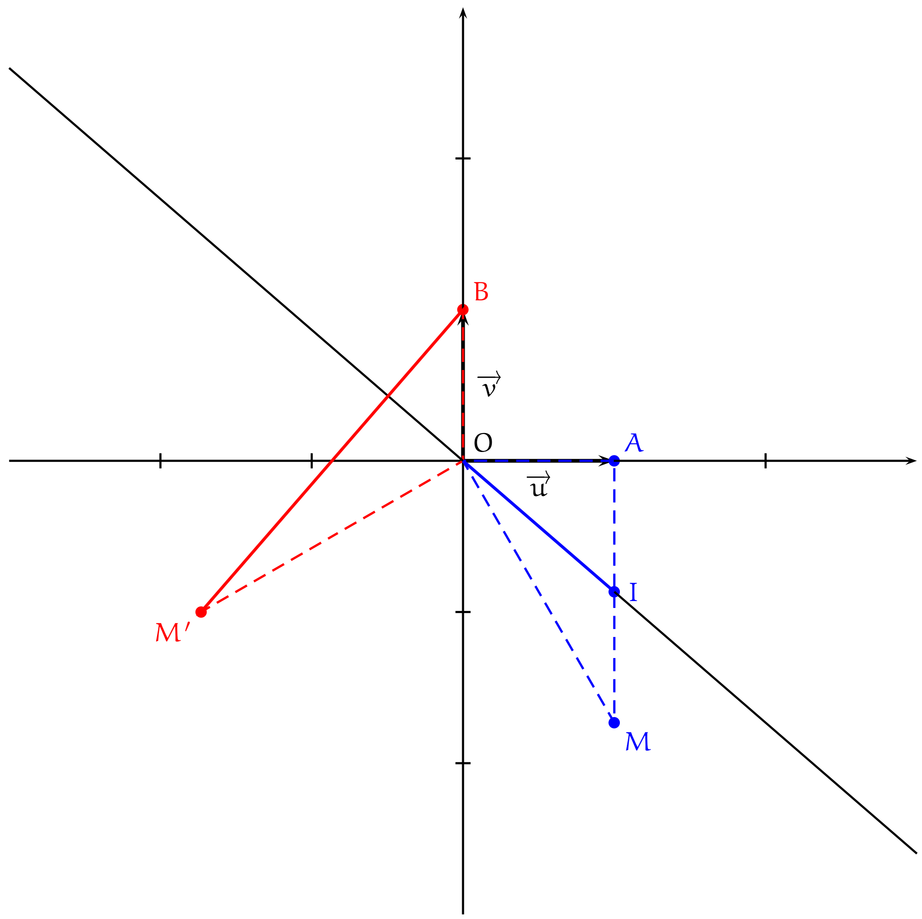
$$\boxed{Z_{M'} = -\sqrt{3} - i.}$$

$|Z_{M'}| = \left|-\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$Z_{M'} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-5i\pi/6}.$$

$$\boxed{\text{Le module de } Z_{M'} \text{ est } 2 \text{ et un argument de } Z_{M'} \text{ est } -\frac{5\pi}{6}.}$$

c) La droite (OI) semble être perpendiculaire à la droite (BM') et la distance BM' semble être le double de la distance OI.



2) On pose $Z_M = x + iy$ avec x et y réels tels que $y \neq 0$.

a) $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_M) = \frac{1}{2}(1 + x + iy) = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}$.

$$\boxed{Z_I = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}.}$$

b) $z_{M'} = -iz_M = -i(x + iy) = y - ix$.

$$\boxed{Z_{M'} = y - ix.}$$

c) Les coordonnées des points I, B et M' sont respectivement $\left(\dfrac{1+x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$, $(0, 1)$ et $(y, -x)$.

d) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OI}$ sont $\left(\dfrac{1+x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM'}$ sont $(y, -x-1)$. Par suite,

$$\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BM'} = \frac{1+x}{2} \times y + \frac{y}{2} \times (-x-1) = \frac{(1+x)y - y(1+x)}{2} = 0.$$

Donc, la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (BM') ou encore

$$\boxed{\text{la droite } (OI) \text{ est la hauteur issue de } O \text{ du triangle } OBM'.}$$

e) $BM'^2 = \left\|\overrightarrow{BM'}\right\|^2 = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (-(x+1))^2 = (x+1)^2 + y^2$.

$OI^2 = \left\|\overrightarrow{OI}\right\|^2 = \dfrac{1}{4}\left((x+1)^2 + y^2\right)$.

Donc, $BM'^2 = 4OI^2$ et finalement

$$\boxed{BM' = 2OI.}$$

