

Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

- 1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3 .
 - b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.
 - c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
 - d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .
- 2) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

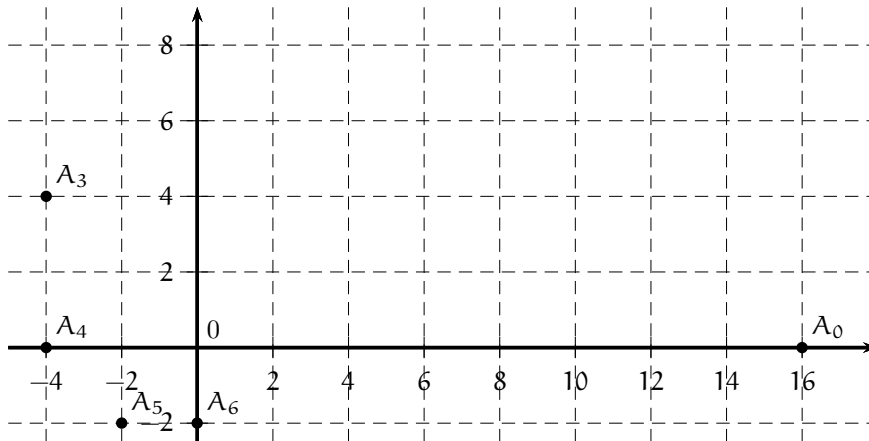
On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, \dots

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

- 3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
- b) Donner une expression de L_n en fonction de n .
- c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 2



Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

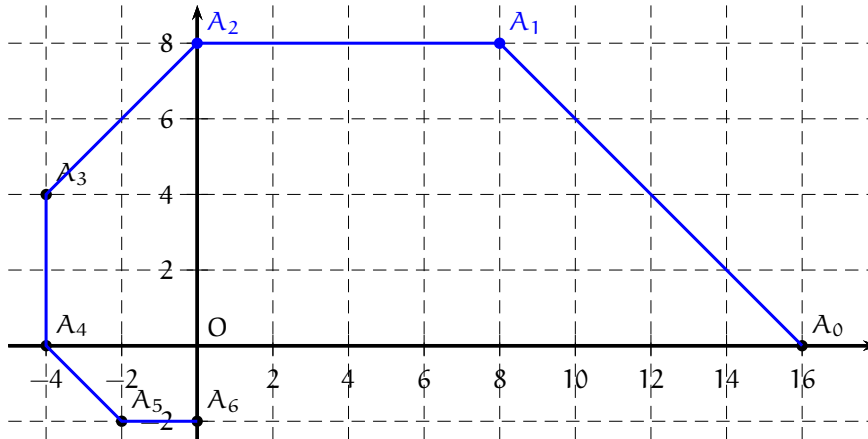
1) a) • $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i$.

• $z_2 = \frac{1+i}{2} \times (8 + 8i) = 4(1+i)^2 = 4(1+2i-1) = 8i$.

• $z_3 = \frac{1+i}{2} \times 8i = 4i(1+i) = -4 + 4i$.

$$z_1 = 8 + 8i, z_2 = 8i \text{ et } z_3 = -4 + 4i.$$

b) Figure.



c) $\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ puis

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

d)

$$OA_1 = |z_1| = |8 + 8i| = 8|1+i| = 8\sqrt{1^2+1^2} = 8\sqrt{2}$$

et

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8i - 16| = |-8 + 8i| = 8|-1+i| = 8\sqrt{(-1)^2+1^2} = 8\sqrt{2}.$$

Donc, $OA_1 = A_0A_1 = 8\sqrt{2}$ et le triangle OA_0A_1 est isocèle en A_1 .

D'autre part, $OA_0 = |z_0| = |16| = 16$ puis

$$A_1O^2 + A_1A_0^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 128 + 128 = 256 = 16^2 = OA_0^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1 . Finalement

le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2) Soit n un entier naturel. D'après la question 1)c),

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n.$$

Ceci montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite (r_n) est-elle convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$. Géométriquement cela signifie que la distance du point O au point A_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} A_n A_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{1+i}{2} z_n - z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} - 1 \right| \times |z_n| = \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times r_n = \frac{|-1+i|}{2} \times r_n \\ &= \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}{2} r_n = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \\ &= r_{n+1} \text{ (d'après la question 2)}. \end{aligned}$$

$$\text{pour tout entier naturel } n : A_n A_{n+1} = r_{n+1}.$$

b) Puisque la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $r_0 = 16$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on sait que pour tout entier naturel n ,

$$r_n = r_0 \times q^n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} L_n &= A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n \text{ (d'après la question 3)a)} \\ &= 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 + 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \dots + 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \\ &= 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 + \dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right) \\ &= 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} &= \frac{16\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{16}{\sqrt{2} - 1} = \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 16(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, L_n = 16(\sqrt{2} + 1) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right).$$

c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 16(\sqrt{2} + 1).$$