

France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z .

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2) On désigne par α le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Calculer α^2 sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3) **Restitution organisée de connaissances**

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe \bar{z} défini par $\bar{z} = x - iy$.

Démontrer que :

a) Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

b) Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

4) Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué \bar{z} est également une solution de (E).

En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.