France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2) On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3) Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$.

Démontrer que :

a) Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

b) Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4) Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation $Z^2+4Z+16=0$ est $\Delta=4^2-4\times1\times16=-3\times16<0$.

L'équation $Z^2+4Z+16=0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir

$$Z_1=\frac{-4+i\sqrt{3\times16}}{2}=\frac{-4+4i\sqrt{3}}{2}=-2+2i\sqrt{3}$$

et $Z_2=\overline{Z_1}=-2-2i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } Z^2+4Z+16=0 \text{ sont } Z_1=-2+2i\sqrt{3} \text{ et } Z_2=\overline{Z_1}-2-2i\sqrt{3}.}$$

$|Z_1|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+4\times3}=\sqrt{16}=4$ puis

$$Z_1=-2+2i\sqrt{3}=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=4e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et $Z_2=\overline{Z_1}=4e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\boxed{Z_1=4e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } Z_2=4e^{-\frac{2i\pi}{3}}.}$$

2) $a=2e^{\frac{i\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$ puis

$$a^2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=1+2i\sqrt{3}-3=-2+2i\sqrt{3}.$$

Soit alors z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}z^2=-2+2i\sqrt{3}&\Leftrightarrow z^2=a^2\Leftrightarrow z^2-a^2=0\Leftrightarrow(z-a)(z+a)=0\\&\Leftrightarrow z=a \text{ ou } z=-a\Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3} \text{ ou } z=-1-i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2=-2+2i\sqrt{3} \text{ sont } a=1+i\sqrt{3} \text{ et } -a=-1-i\sqrt{3}.}$$

3) Restitution organisée de connaissances

a) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Posons $z_1=x_1+iy_1$ et $z_2=x_2+iy_2$ où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont quatre réels.

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\times\overline{z_2}&=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=x_1x_2-ix_1y_2-ix_2y_1-y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\overline{z_1z_2}&=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}=\overline{x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1-y_1y_2}\\&=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}\\&=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

Par suite, $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$.

b) Soit z un nombre complexe z. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$.

- $\overline{z^1}=\overline{z}=(\overline{z})^1$. Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand $n=1$.
- Soit $n\geqslant1$. Supposons que $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ et montrons que $\overline{z^{n+1}}=(\overline{z})^{n+1}$.

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}}&=\overline{z\times z^n}\\&=\overline{z}\times\overline{z^n}\ \text{(d'après a))}\\&=\overline{z}\times(\overline{z})^n\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\\&=(\overline{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \Rightarrow \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} \\ &\Rightarrow \overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \overline{z} \text{ solution de } (E). \end{aligned}$$

Maintenant (a ayant été défini à la question 2)), $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ puis $a^2 = 2^2 e^{2\times\frac{i\pi}{3}} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} = Z_1$ (où Z_1 a été défini à la question 1)). Par suite,

$$a^4 + 4a^2 + 16 = \left(a^2\right)^2 + 4a^2 + 16 = (Z_1)^2 + 4Z_1 + 16 = 0.$$

Ainsi, a est solution de l'équation (E). $-a$ est aussi solution car $(-a)^4 + 4(-a)^2 + 16 = a^4 + 4a^2 + 16 = 0$. D'après le début de la question 4), $\overline{a}$ et $\overline{-a} = -\overline{a}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

En résumé, les quatres nombres $1 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$ sont solutions de l'équation (E). Or, ces quatre nombres sont deux à deux distincts et, d'après le résultat admis par l'énoncé, l'équation (E) admet au plus quatre solutions. Donc,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ est } \left\{1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\right\}.}$$

