

Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) $u_0 = |z_0| = \left| \sqrt{3} - i \right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2.$

$$u_0 = 2.$$

2) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2} u_n = \sqrt{2} u_n.$$

Donc

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \sqrt{2}$.

3) On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 2 \left(\sqrt{2} \right)^n.$

Pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \left(\sqrt{2} \right)^n.$

4) Puisque $\sqrt{2} > 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2} \right)^n = +\infty$. Puisque $2 > 0$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\sqrt{2} \right)^n = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

5) Algorithme complété.

Variables :	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement :	Tant que $u \leq p$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher la variable n

Partie B

1) $z_1 = (1 + i) \left(\sqrt{3} - i \right) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} + 1 \right) + i \left(\sqrt{3} - 1 \right).$

$$z_1 = \left(\sqrt{3} + 1 \right) + i \left(\sqrt{3} - 1 \right).$$

2) $|z_0| = u_0 = 2$ puis

$$z_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2e^{-i\pi/6}.$$

De même,

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite, $z_1 = (1 + i)z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \times 2e^{-i\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

$$z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3) Des deux questions précédentes, on déduit

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)i = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1).$$

En identifiant les parties réelles, on obtient $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1$ ou encore

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$