Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1) Calculer u_0.

2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5) Etant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables :	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement :	
Sortie :	

Partie B

1) Déterminer la forme algébrique z_1.

2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et $1+i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1.

3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$.

$$\boxed{u_0 = 2.}$$

2) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2}\, u_n = \sqrt{2}\, u_n.$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite géométrique de premier terme } u_0 = 2 \text{ et de raison } q = \sqrt{2}.}$$

3) On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n.}$$

4) Puisque $\sqrt{2} > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$. Puisque $2 > 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

5) Algorithme complété.

Variables :	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p

Traitement :	Tant que $u \leqslant p$
	    Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
	    Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher la variable n

Partie B

1) $z_1 = (1 + i)\left(\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

$$\boxed{z_1 = \left(\sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right).}$$

2) $|z_0| = u_0 = 2$ puis

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\pi/6}.$$

De même,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite, $z_1 = (1 + i)z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \times 2e^{-i\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$$\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.}$$

3) Des deux questions précédentes, on déduit

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) i = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right).$$

En identifiant les parties réelles, on obtient $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+1$ ou encore

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

