Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit z un nombre complexe de la forme $x+iy$, où x et y sont des réels.

1) Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a) $\sqrt{2}e^{i\pi}$

b) $4e^{i\pi}$

c) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) $4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x+iy$ tels que $|z-1+i| = \left|\sqrt{3}-i\right|$ a pour équation :

a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

c) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

d) $y = x + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

3) On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1+i$ et $Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}Z_n$.
On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

a) Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

c) La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

d) Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

4) Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_A = -1-i \quad ; \quad Z_B = 2-2i \quad \text{et} \quad Z_C = 1+5i.$$

On pose $Z = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

a) Z est un nombre réel.

b) Le triangle ABC est isocèle en A.

c) Le triangle ABC est rectangle en A.

d) Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse c)

Explications
1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Ensuite,

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

2) Soient x et y deux réels puis $z = x+iy$.

$$\begin{aligned}|z-1+i| = \left|\sqrt{3}-i\right| &\Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|^2 = \left|\sqrt{3}-i\right|^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 4.\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse c).

3) Pour tout entier naturel n,

$$|Z_{n+1}| = \frac{|1+i|}{2}|Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|Z_n|.$$

La suite $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Puisque $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à 0.

Donc, la bonne réponse est la réponse c).

On peut noter que $|Z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $|Z_1| \neq \sqrt{2} = |Z_0|$ et aussi $OM_1 \neq OM_1$. Donc les réponses a) et b) sont effectivement fausses.
D'autre part, $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n} = \frac{1+i}{2} - 1 = \frac{-1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $-\frac{\pi}{4}$. La réponse d) est effectivement fausse.

4)

$$Z = \frac{(1+5i)-(-1-i)}{(2-2i)-(-1-i)} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{2i(3-i)}{3-i} = 2i.$$

Donc Z n'est pas réel et la réponse a) est fausse. D'autre part,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|Z_C-Z_A|}{|Z_B-Z_A|} = \left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right| = |2i| = 2,$$

et donc $AC \neq AB$. La réponse b) est fausse.

Ensuite,

$$MB = |Z_B - Z| = |2-2i-2i| = |2-4i| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$$

et

$$MC = |Z_C - Z| = |1 + 5i - 2i| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Donc, $MB \neq MC$ et la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions le.

$Z_{\overrightarrow{AB}} = 3 - i$ ou encore les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3, -1)$.
$Z_{\overrightarrow{AC}} = 2 + 6i$ ou encore les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(2, 6)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 0.$$

La proposition c) est effectivement vraie.

