Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n quand n tend vers $+\infty$?

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

b) Pour $P = 0,01$, on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4) a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c) Compléter la figure donnée en annexe, **à rendre avec la copie**, représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

ANNEXE