Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n quand n tend vers $+\infty$?

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n + 1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

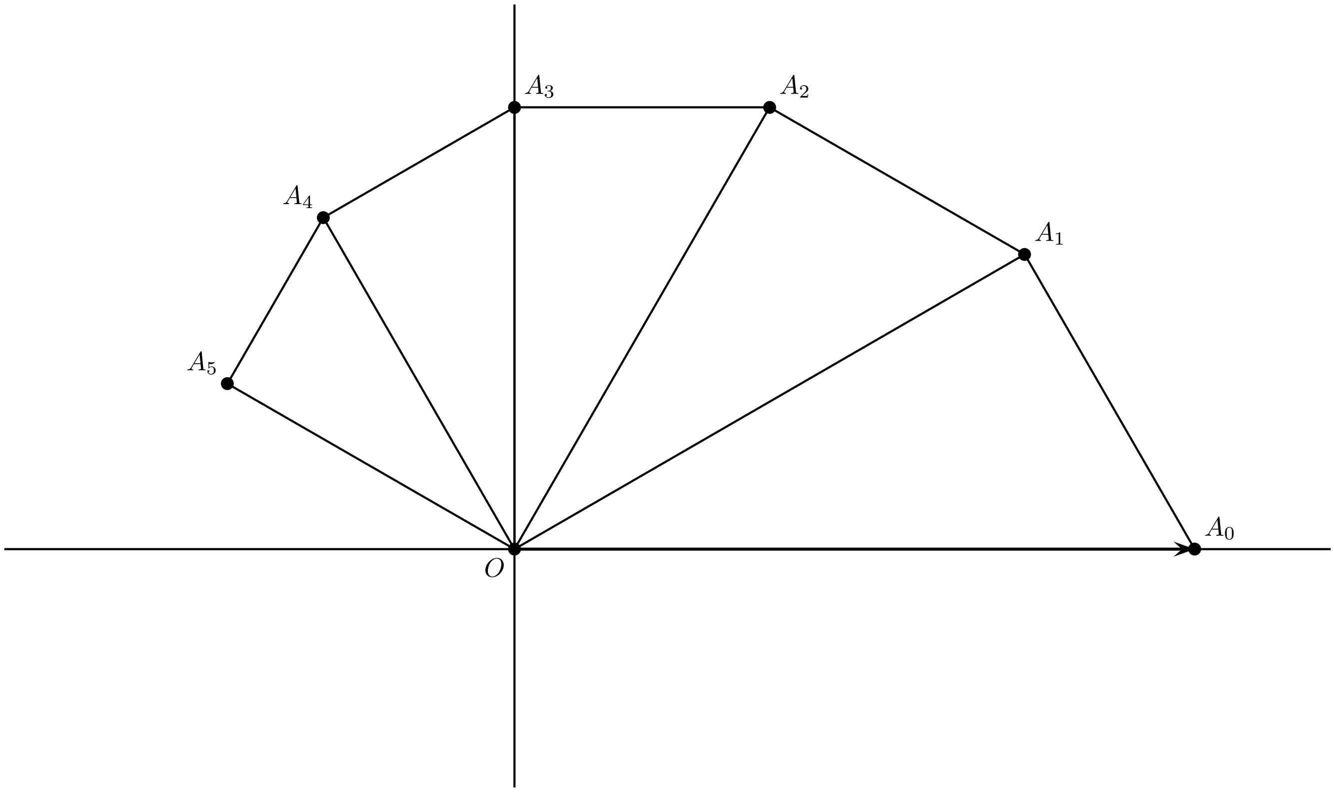
b) Pour $P = 0,01$, on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4) a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c) Compléter la figure donnée en annexe, **à rendre avec la copie**, représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

ANNEXE



Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) $\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{12}{16}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}.$$

$$\boxed{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}.}$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n.$$

Donc la suite r_n est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$r_n = r_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.}$$

c) Pour tout entier naturel n, $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Puisque $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, on sait que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} OA_n = 0.}$$

3) a) Décrivons les différentes étapes.

- **Etape 1.** $R = 1$ et $n = 0$.
- **Etape 2.** On a $R > P$. Donc $n = 1$ et $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,8\ldots$
- **Etape 3.** On a $R > P$. Donc $n = 2$ et $R = \dfrac{3}{4} = 0,75$
- **Etape 4.** On a $R > P$. Donc $n = 3$ et $R = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = 0,6\ldots$
- **Etape 5.** On a $R > P$. Donc $n = 4$ et $R = \dfrac{9}{16} = 0,56\ldots$
- **Etape 6.** On a $R > P$. Donc $n = 5$ et $R = \dfrac{9\sqrt{3}}{32} = 0,4\ldots.$

On a maintenant $R \leqslant P$ et donc l'algorithme s'arrête et affiche 5.

$$\boxed{\text{L'algorithme affiche 5.}}$$

b) L'algorithme demande la précision P puis affiche la première valeur de n pour laquelle $r_n \leqslant P$.

4) a) Soit n un entier naturel.

- $OA_{n+1} = r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r_n$ et $OA_n = r_n$. Enfin,

$$A_{n+1}A_n = |z_{n+1}-z_n| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n - z_n\right| = |z_n| \times \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right| r_n = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\, r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}r_n = \frac{1}{2}r_n.$$

Mais alors,

$$A_{n+1}O^2 + A_{n+1}A_n^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 r_n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_n^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) r_n^2 = r_n^2 = OA_n^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b) Soit n un entier naturel. Puisque $z_n = r_n e^{in\pi/6}$ et que $r_n > 0$, un argument de z_n est $n\dfrac{\pi}{6}$. Par suite

$$\begin{aligned} A_n \in (Oy) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n = 3 + 6k \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier naturel } k \text{ tel que } n = 3 + 6k \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).} \end{aligned}$$

Les entiers naturels n pour lesquels A_n est un point de l'axe des ordonnées sont les entiers naturels de la forme $3+6k$, $k \in \mathbb{N}$. Ce sont les entiers 3, 9, 15, 21 ...

c) Figure.