Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Un graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1) Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.

6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1)

$$f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+i\sqrt{3}\right)+9=1-2i\sqrt{3}-3-2+2i\sqrt{3}+9=5.$$

$$\boxed{f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=5.}$$

2) Pour tout nombre complexe z, $f(z)=5\Leftrightarrow z^2+2z+4=0$.

Le discriminant de l'équation $z^2+2z+4=0$ est $\Delta=2^2-4\times1\times4=-12<0$. L'équation $z^2+2z+4=0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1=\dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2}=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}$.

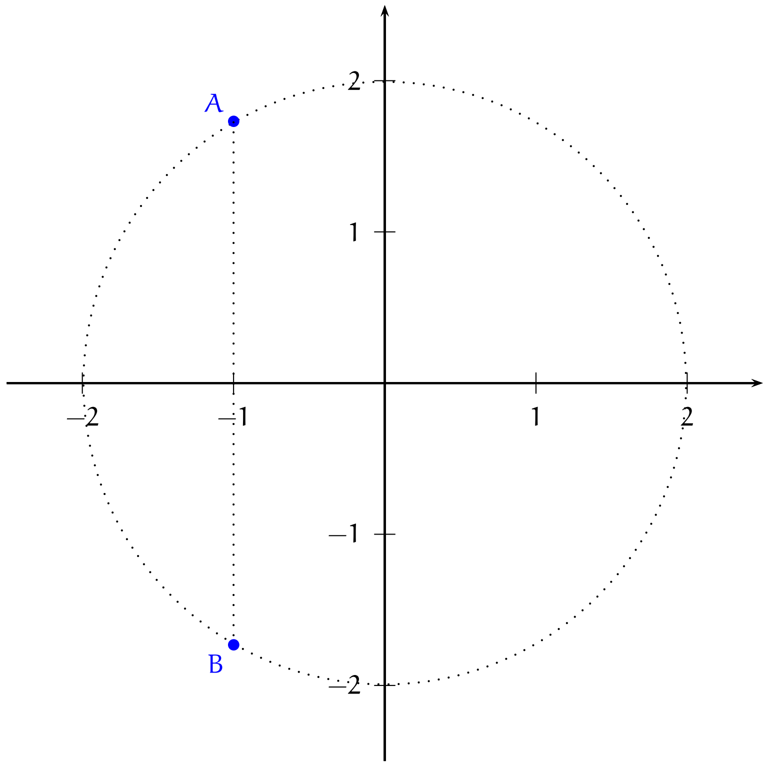
$|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ puis

$$z_1=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et aussi $z_2=\overline{z_1}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(z)=5 \text{ sont } z_1=-1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.}$$

Figure. A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'abscisse -1 et d'ordonnée positive.



3) Soit λ un nombre réel. Pour tout nombre complexe z, $f(z)=\lambda\Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda=0$.

Le discriminant de l'équation $z^2+2z+9-\lambda=0$ est

$$\Delta=2^2-4\times1\times(9-\lambda)=4\lambda-32.$$

L'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si $\Delta<0$ ce qui équivaut à $4\lambda-32<0$ ou enfin à $\lambda<8$.

$$\boxed{\text{L'ensemble cherché est }]-\infty,8[.}$$

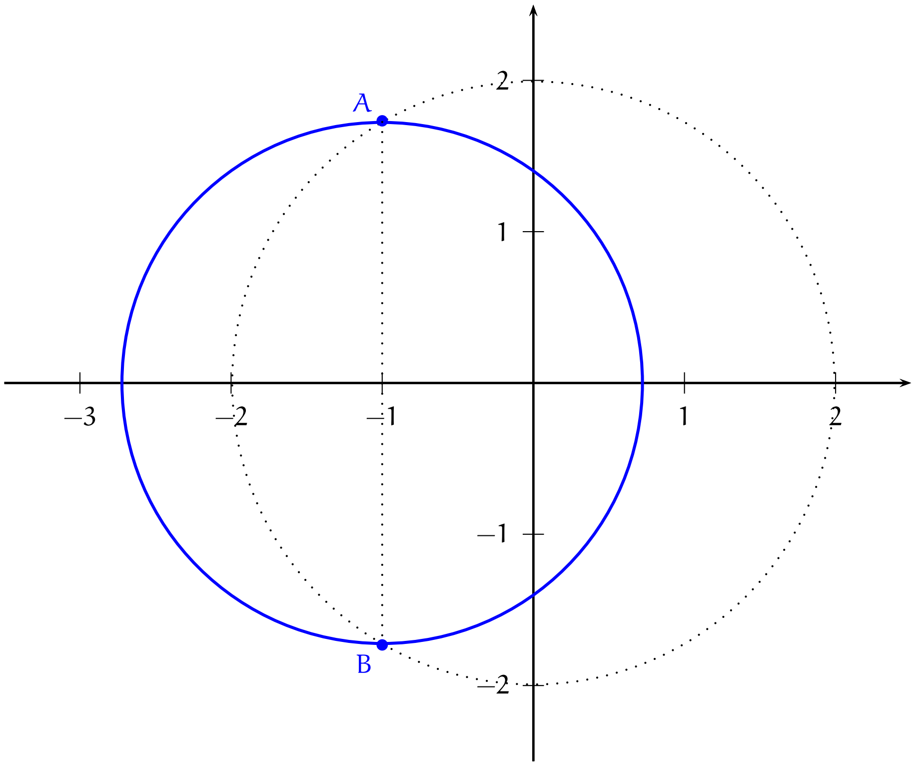
4) Soit z un nombre complexe. Soit M le point du plan d'affixe z.

$$|f(z)-8| = 3 \Leftrightarrow \left|z^2+2z+1\right| = 3 \Leftrightarrow \left|(z+1)^2\right| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow |z-(-1)| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}.$$

Donc, (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. On note que les points A et B appartiennent à (F) car

$$f\left(z_1\right) = 5 \Rightarrow f\left(z_1\right) - 8 = -3 \Rightarrow \left|f\left(z_1\right) - 8\right| = 3,$$

et de même pour z_2.



5) a) Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

$$f(z) = (x+iy)^2 + 2(x+iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b) Par suite,

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(f(z)\right) = 0 \Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1.$$

(E) est la réunion de la droite D_1 d'équation $y = 0$ et de la droite D_2 d'équation $x = -1$. Voir graphique à la fin.

6) • Soit $M(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ puis $z = x$ l'affixe de M.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |x+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3} \text{ ou } x+1 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1+\sqrt{3} \text{ ou } x = -1-\sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de (F) et $\mathscr{D}_1$ sont les points $C\left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$ et $D\left(-1+\sqrt{3}, 0\right)$.

• Soit $M(-1, y)$, $y \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$ puis $z = iy$ l'affixe de M.

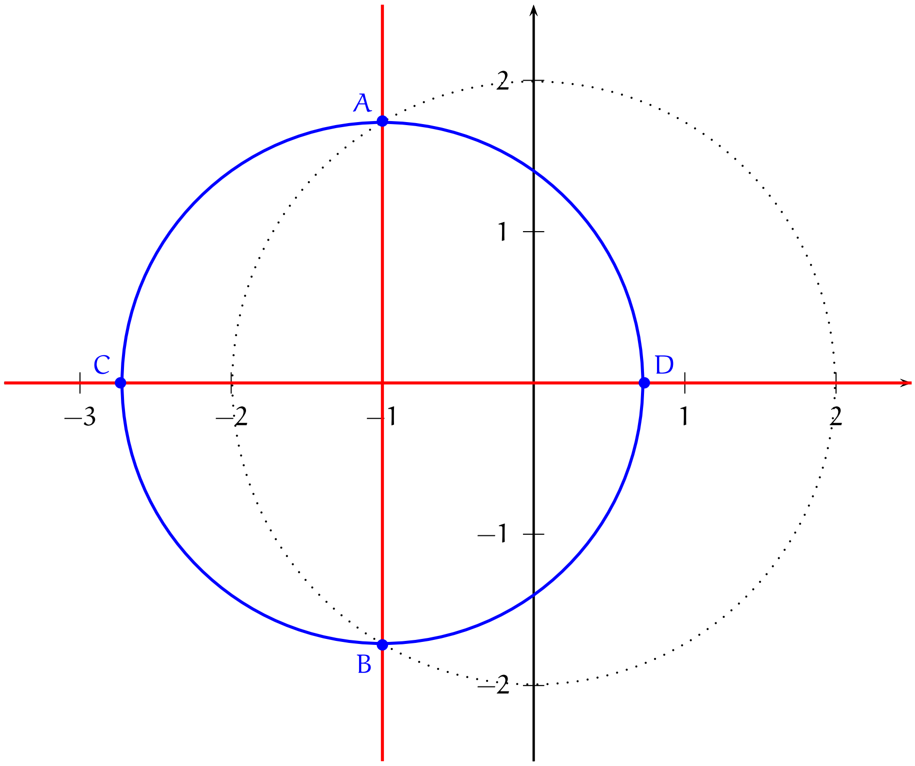
$$M \in (F) \Leftrightarrow |-1+iy+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |iy| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |i| \times |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de (F) et $\mathscr{D}_2$ sont les points $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$ et $B\left(-1, -\sqrt{3}\right)$.

Finalement, les points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont les points $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $B\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, $C\left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$ et $D\left(-1+\sqrt{3}, 0\right)$.

Remarque. On devait obtenir au moins les points A et B car par exemple, d'après 2),

$$f\left(z_A\right) = 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f\left(z_A\right) \in \mathbb{R} \\ f\left(z_A\right) - 8 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f\left(z_A\right) \in \mathbb{R} \\ \left|f\left(z_A\right) - 8\right| = 3 \end{array}\right. \Rightarrow A \in (E) \cap (F).$$



A
C
D
B
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2

