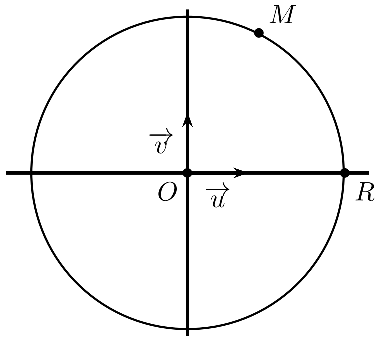
AntillesGuyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (4 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[0, \overrightarrow{u})$.



1) Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2) Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3) On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

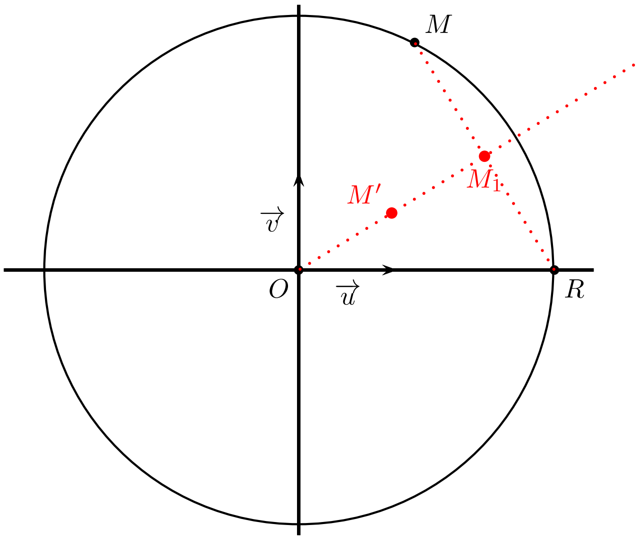
Antilles Guyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Le point $|z_R| = |z_M| = |z|$ et $\arg(z_R) = 0\ [2\pi]$. Par suite, $x_R = |z| \times \cos(0) = |z|$ et $y_R = |z| \times \sin(0) = 0$. Le point R a pour coordonnées $(|z|, 0)$.

2) On construit d'abord M_1 le milieu du segment $[MR]$. M' est alors le milieu du segment $[OM_1]$.



Partie B

1) Soit z_0 un réel négatif. Alors, $|z_0| = -z_0$ puis $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $z_n = 0$.

- L'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $z_n = 0$. Alors, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4} = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $z_n = 0$.

En particulier, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\dim n{+}\infty z_n = 0$.

2) Soit z_0 un réel positif. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que z_n soit un réel positif. Alors $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$ est un réel positif.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif.

Puisque pour $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif, pour tout $n \geqslant 0$, on a $z_{n+1} = \dfrac{z_n + z_n}{4} = \dfrac{z_n}{2}$.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\dfrac{1}{2}$. On en déduit que

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ z_n = z_0\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on en déduit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\dim n{+}\infty z_n = 0$.

3) a) Il semble que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\dim n{+}\infty\, |z_n| = 0$.

b) Soit $n \geqslant 0$.

$$|z_{n+1}| = \frac{1}{4}\left|z_n + |z_n|\right| \leqslant \frac{1}{4}\left(|z_n| + \left||z_n|\right|\right) = \frac{1}{4}\left(|z_n| + |z_n|\right) = \frac{|z_n|}{2}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

- Puisque $\dfrac{|z_0|}{2^0} = |z_0|$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$. Alors $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{|z_n|}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{|z_0|}{2^n} = \dfrac{|z_0|}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $0 \leqslant |z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|z_0|}{2^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

