Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On donne le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3) Démontrer les égalités suivantes :

a) $j^3 = 1$;

b) $\mathrm{j}^2 = -1 - j$.

4) On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B.

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1) En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.

2) En déduire que $AC = BC$.

3) Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.

4) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) a) Le discriminant de l'équation $z^2+z+1=0$ est $\Delta = 1^2-4\times1\times1=-3<0$. L'équation $z^2+z+1=0$ admet deux solutions complexes non réelles conjuguées à savoir $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2+z+1=0 \text{ sont } -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

b) En particulier, le nombre $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2) $|j|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$ puis

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$ ou encore

$$\boxed{j=e^{\frac{2i\pi}{3}}.}$$

3) a) $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{\frac{2i\pi\times3}{3}}=e^{2i\pi}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$.

b) j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ et donc $j^2+j+1=0$ puis $j^2=-1-j$.

4) $\left|j^2-1\right|=\left|1-j^2\right|=\left|j^3-j^2\right|=\left|j^2\right|\times|j-1|=|j|^2\times|j-1|=|j-1|$ et $\left|j^2-j\right|=\left|1-j^2\right|=|j|\times|j-1|=|j-1|$.

En résumé, $|j-1|=\left|j^2-1\right|=\left|j^2-j\right|$ ou encore $PQ=PR=QR$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Le triangle } PQR \text{ est équilatéral.}}$$

Partie B

1) $a-c=-jb-j^2c-c=-jb+(j+1)c-c=-jb+jc=j(c-b)$.

2) $AC=CA=|a-c|=|j(c-b)|=|j|\times|c-b|=|c-b|=BC$.

3) $a-b=-jb-j^2c-b=(-j-1)b-j^2c=j^2bj^2c=j^2(b-c)$.

4) $BA=|a-b|=\left|j^2(b-c)\right|=|j|^2\,|b-c|=|b-c|=CB$. Ainsi, $AB=AC=BC$ et donc

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est équilatéral.}}$$

