France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

a) Calculer le module et un argument du nombre a.

b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2) d)** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3) On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Montrer que $b' = 8$.

b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4) On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
L'équation (E) admet donc deux solutions complexes non réelles conjuguées

$$z_1 = \frac{-(-8) + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$$

et $z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ est } \left\{4 + 4i\sqrt{3}, 4 - 4i\sqrt{3}\right\}.}$$

2) a) $|a| = \left|4\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = 4\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{1+3} = 4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$ puis

$$a = 8\left(\frac{4}{8} + i\frac{4\sqrt{3}}{8}\right) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$$\boxed{|a| = 8 \text{ et un argument de } a \text{ est } \frac{\pi}{3}.}$$

b) Par suite, $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{a = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

c) On a déjà $|a| = 8$ et $|b| = 8$. Enfin, $|c| = |8i| = 8|i| = 8$. Donc,

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 8.}$$

d) Voir figure page suivante.

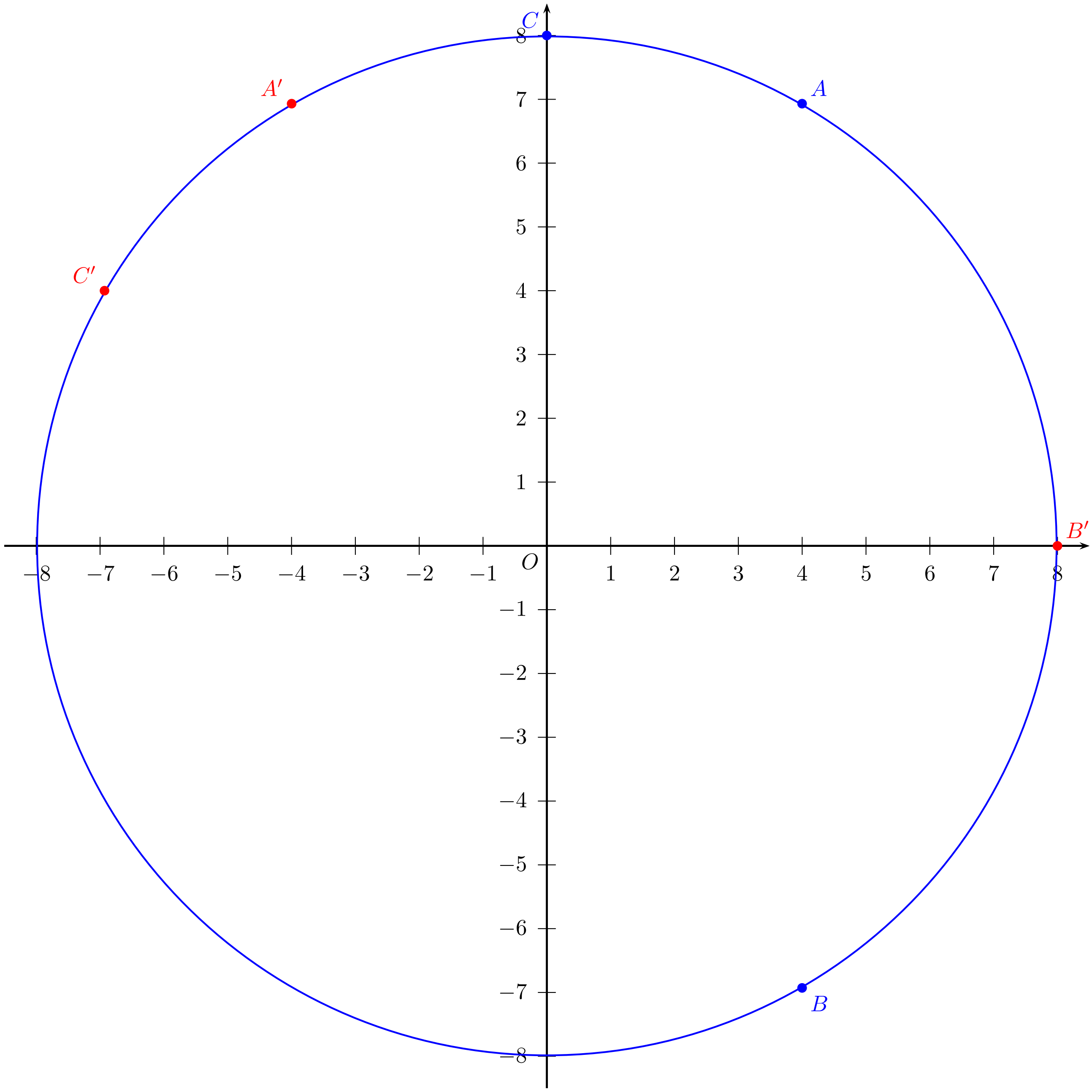
3) a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^0 = 8$.

$$\boxed{b' = 8.}$$

b) $a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

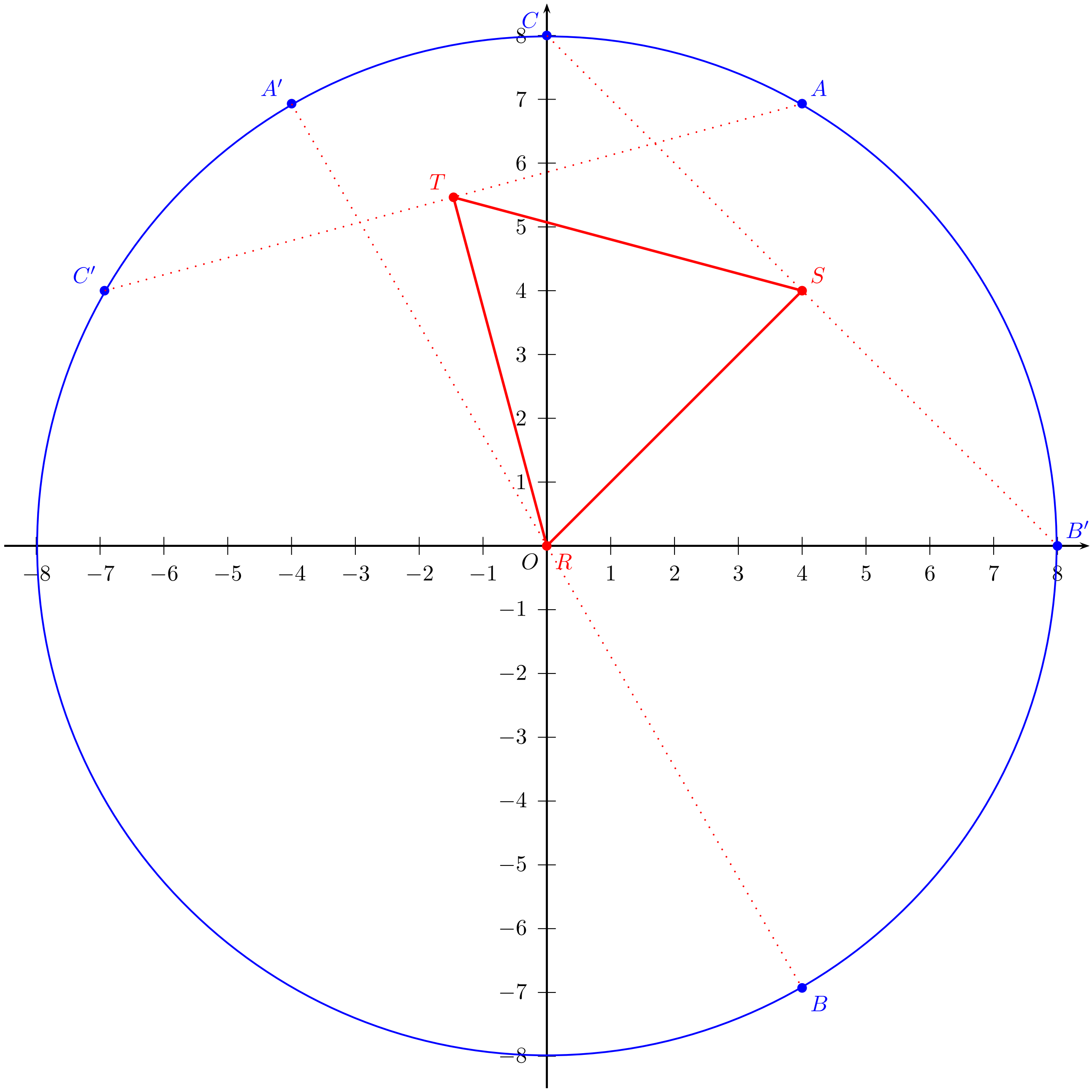
$$\boxed{|a'| = 8 \text{ et un argument de } a' \text{ est } \frac{2\pi}{3}.}$$

Figure.



4) a) $r = \dfrac{a' + b}{2} = \dfrac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 0$. $s = \dfrac{b' + c}{2} = \dfrac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i$.

b) Figure.



Il semble que le triangle RST soit équilatéral.

