

# Polynésie 2015. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ .

$$\begin{aligned}M \text{ invariant} &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z \\ &\Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation  $z^2 + 3z + 3 = 0$  est  $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ . Donc l'équation  $z^2 + 3z + 3 = 0$  admet deux solutions complexes non réelles conjuguées  $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ .

Donc, il existe exactement deux points invariants, le point  $M_1$  d'affixe  $z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Déterminons la forme trigonométrique de  $z_1$  et  $z_2$ .

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \text{ puis}$$

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

D'autre part,  $z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ .

$$z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}.$$

2) On sait déjà que  $OA = |z_A| = |z_2| = \sqrt{3}$  et  $OB = |z_B| = |z_1| = \sqrt{3}$ . Enfin,

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}|i| = \sqrt{3}.$$

En résumé,  $OA = OB = AB = \sqrt{3}$  et donc le triangle  $OAB$  est équilatéral.

3) Soient  $x$  et  $y$  deux réels puis  $z = x + iy$ .

$$\begin{aligned}z' = z^2 + 4z + 3 &= (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = x^2 + 2ixy - y^2 + 4x + 4iy + 3 \\ &= x^2 - y^2 + 4x + 3 + 2iy(x + 2).\end{aligned}$$

Par suite,

$$M' \in (Ox) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow y(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } y = 0.$$

$\mathcal{E}$  est la réunion des droites d'équation respectives  $x = -2$  et  $y = 0$ .

4) Graphique.

