

Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n , on définit les points (A_n) par leurs coordonnées (x_n, y_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1) a) Déterminer les coordonnées des points A_0 , A_1 et A_2 .

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

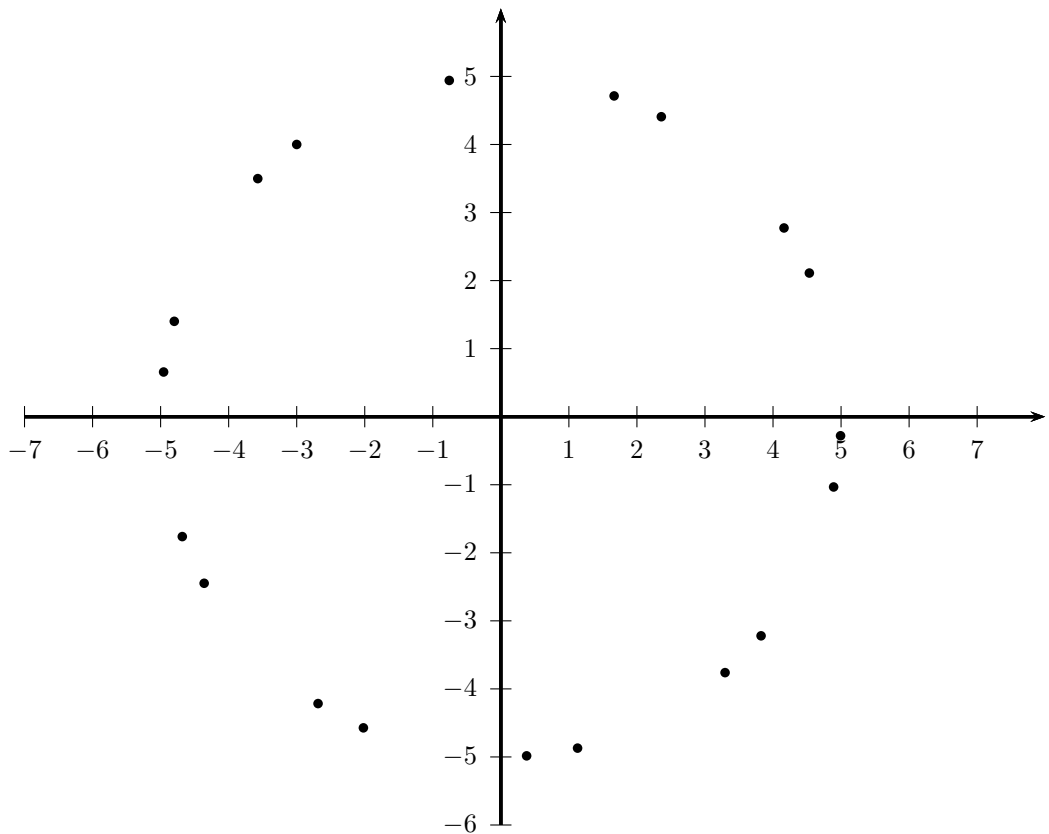
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées (x, y)
    t prend la valeur x
    x prend la valeur ...
    y prend la valeur ...
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20} .

c) A l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0 , A_1 et A_2 . On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**. Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2) Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel. Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n , $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n .

a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5$.
Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d) Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .

e) Pour tout entier naturel n , déterminer, en fonction de n et θ , un argument du nombre complexe z_n .

Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

Expliquer, pour tout entier naturel n , comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n .

