

Montrer que, pour tout entier naturel n , $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = e^{in\theta} z_0$.

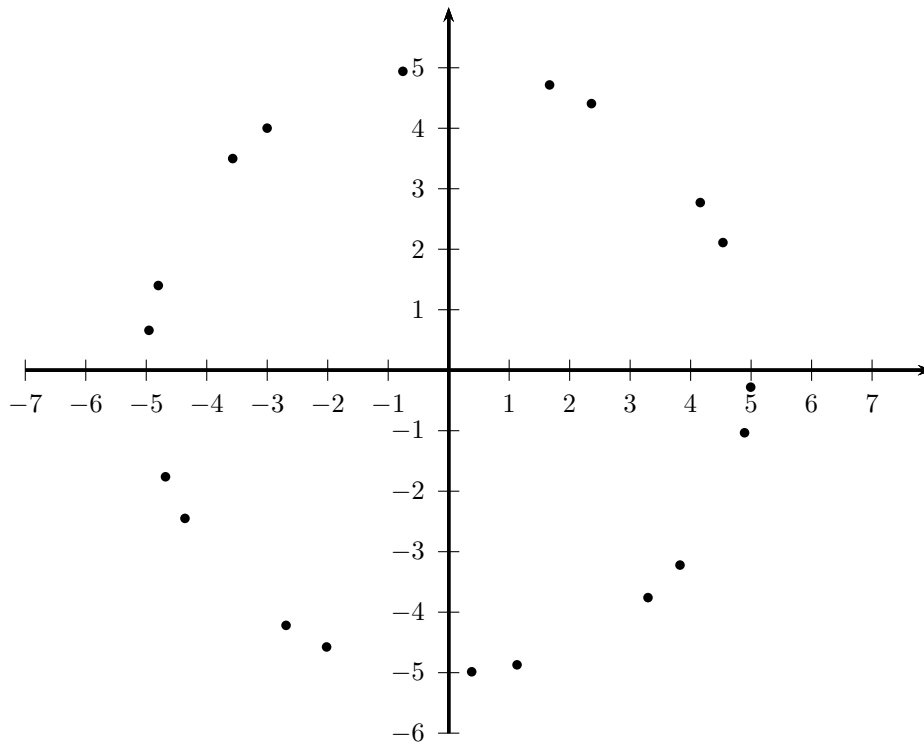
d) Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .

e) Pour tout entier naturel n , déterminer, en fonction de n et θ , un argument du nombre complexe z_n .

Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

Expliquer, pour tout entier naturel n , comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n .

Annexe 2



Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a)

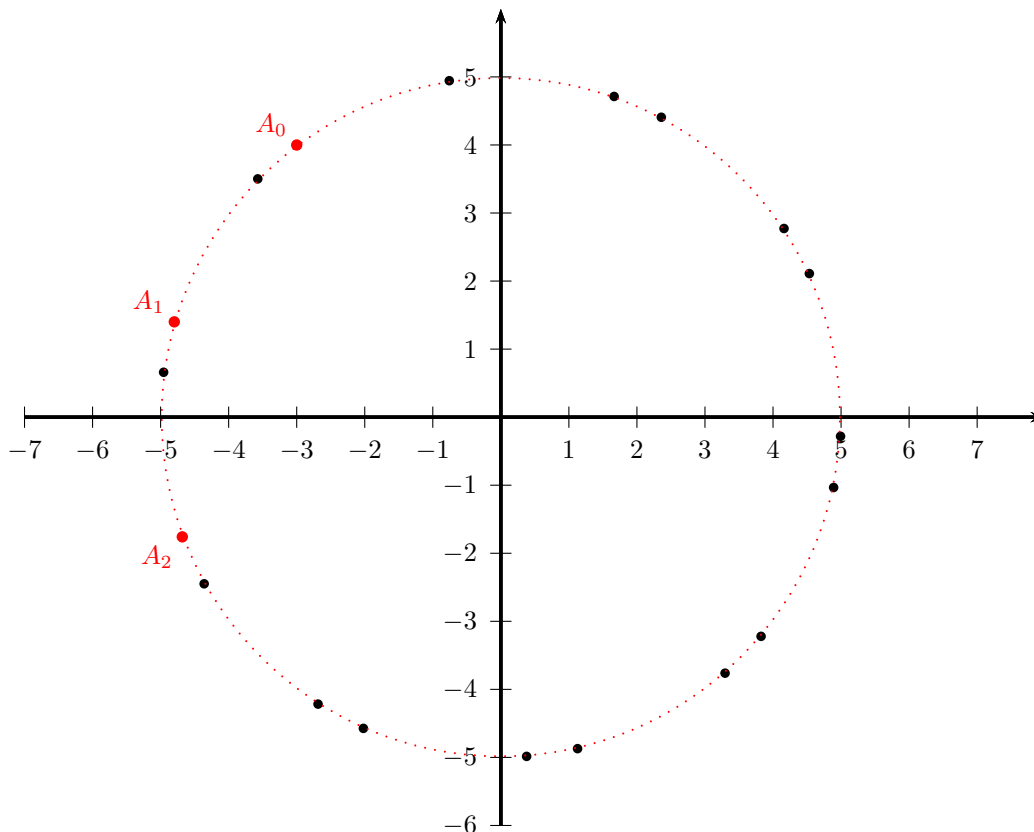
- $x_0 = -3$ et $y_0 = 4$. Donc, $A_0(-3; 4)$.
- $x_1 = 0, 8x_0 - 0, 6y_0 = 0, 8(-3) - 0, 6(4) = -4, 8$ et $y_1 = 0, 6x_0 + 0, 8y_0 = 0, 6(-3) + 0, 8(4) = 1, 4$. Donc $A_1(-4, 8; 1, 4)$.
- $x_2 = 0, 8x_1 - 0, 6y_1 = 0, 8(-4, 8) - 0, 6(1, 4) = -4, 68$ et $y_2 = 0, 6x_1 + 0, 8y_1 = 0, 6(-4, 8) + 0, 8(1, 4) =$. Donc $A_2(-4, 68; -1, 76)$.

b) Algorithme complété.

Variables :
i, x, y, t : nombres réels
Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4
Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées (x, y)
t prend la valeur x
x prend la valeur $0, 8 \times t - 0, 6 \times y$.
y prend la valeur $0, 6 \times t + 0, 8 \times y$.
Fin Pour

Remarque. L'algorithme calcule les coordonnées des points A_0, \dots, A_{21} .

c) Graphique.



Il semble que tous les points A_n soient sur le cercle de centre O et de rayon 5 .

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $|z_n| = 5$.

- $z_0 = -3 + 4i$ et donc $|z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $|z_n| = 5$.

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}| &= \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} = \sqrt{(0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2} \\
&= \sqrt{0,64x_n^2 - 2 \times 0,8 \times 0,6x_n y_n + 0,36y_n^2 + 0,36x_n^2 + 2 \times 0,8 \times 0,6x_n y_n + 0,64y_n^2} \\
&= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \\
&= 5 \text{ (par hypothèse de récurrence.)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $|z_n| = 5$ et donc que tous les points A_n soient sur le cercle de centre O et de rayon 5.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} z_n &= (\cos \theta + i \sin \theta) (x_n + iy_n) = (0,8 + 0,6i) (x_n + iy_n) \\
&= 0,8x_n + 0,8iy_n + 0,6ix_n - 0,6y_n = (0,8x_n - 0,6y_n) + i(0,6x_n + 0,8y_n) \\
&= x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1}.
\end{aligned}$$

c) La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $q = e^{i\theta}$. On sait que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = z_0 \times q^n = z_0 (e^{i\theta})^n = z_0 e^{in\theta}.$$

d) Soit α un argument du nombre complexe $z_0 = -3 + 4i$. On a $|z_0| = 5$ puis

$$z_0 = 5 \left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) = 5(-0,6 + 0,8i) = 5(-\sin(\theta) + i \cos(\theta)) = 5 \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

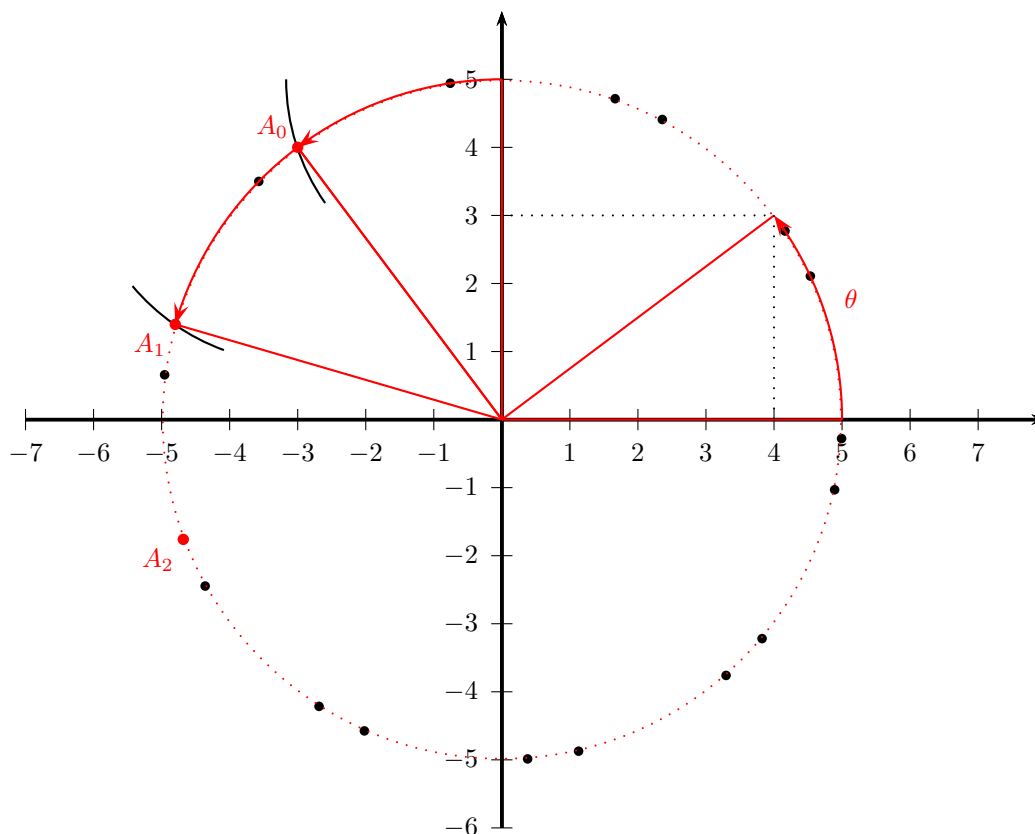
Ceci montre qu'un argument de z_0 est $\theta + \frac{\pi}{2}$.

e) D'après les questions c) et d), pour tout entier naturel n ,

$$z_n = z_0 e^{in\theta} = 5e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} e^{in\theta} = 5e^{i(n\theta + \theta + \frac{\pi}{2})} = 5e^{i((n+1)\theta + \frac{\pi}{2})}.$$

Pour tout entier naturel n , un argument de z_n est $(n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$ (et le module de z_n est 5).

$5 \cos(\theta) = 5 \times 0,8 = 4$ et $5 \sin(\theta) = 5 \times 0,6 = 3$. Donc, θ est un argument de $4 + 3i$.



Pour tout entier naturel n , A_{n+1} est obtenu en faisant tourner A_n autour de O d'un angle de mesure θ dans le sens direct.