

Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit Ω le point d'affixe 2. Soient z un nombre complexe puis M le point du plan d'affixe z .

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - 2| = 1 \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 1 \Leftrightarrow \Omega M = 1.$$

\mathcal{C} est donc le cercle de centre Ω et de rayon 1.

2) Soit a un réel. Soient x un réel puis M le point de \mathcal{D} d'abscisse x . Les coordonnées du point M sont (x, ax) puis l'affixe du point M est $z_M = x + iax$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow |z_M - 2| = 1 \Leftrightarrow |x + iax - 2| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + iax|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (ax)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + 1)x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (E). \end{aligned}$$

Puisque $a^2 + 1 > 0$, (E) est une équation du second degré. Son discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times (a^2 + 1) \times 3 = 16 - 12a^2 - 12 = 4 - 12a^2 = -12 \left(a^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -12 \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

1er cas. Si $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) n'a pas de solution. Dans ce cas, le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} n'ont pas de point commun.

2ème cas. Si $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation (E) a exactement une solution. Dans ce cas, le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} ont exactement un point commun. La droite \mathcal{D} est alors tangente au cercle \mathcal{C} .

3ème cas. Si $-\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation (E) a exactement deux solutions. Dans ce cas, le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} ont exactement deux points communs.

