Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = z_{n+1} - (4+2i) = \frac{1}{2}iz_n + 5 - 4 - 2i = \frac{1}{2}iz_n - (-1+2i) = \frac{1}{2}i\left(z_n - \frac{-1+2i}{\frac{1}{2}i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}i\left(z_n - \frac{2(-1+2i)}{i}\right) = \frac{1}{2}i\left(z_n - \frac{2(-1+2i)(-i)}{i(-i)}\right) = \frac{1}{2}i\left(z_n - 2(-1+2i)(-i)\right)$$
$$= \frac{1}{2}i\left(z_n - (2i+4)\right) = \frac{1}{2}iu_n.$$

b) Montrons par récurrence que pour tout tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$.

- $u_0 = z_0 - (4+2i) = -4-2i = \left(\frac{1}{2}i\right)^0(-4-2i)$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}iu_n \text{ (d'après la question a))} \\ &= \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(-4-2i). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$.

2) Soit n un entier naturel. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$ est

$$z_{\overrightarrow{AM_n}} = z_n - z_A = u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i).$$

On en déduit que

$$z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}(-4-2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i) = \frac{1}{16}z_{\overrightarrow{AM_n}}.$$

Par suite, $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ sont colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A,\ M_n \text{ et } M_{n+4} \text{ sont alignés.}}$$

