

Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (3 points) (commun à tous les candidats)

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= z_{n+1} - (4 + 2i) = \frac{1}{2}iz_n + 5 - 4 - 2i = \frac{1}{2}iz_n - (-1 + 2i) = \frac{1}{2}i \left(z_n - \frac{-1 + 2i}{\frac{1}{2}i} \right) \\ &= \frac{1}{2}i \left(z_n - \frac{2(-1 + 2i)}{i} \right) = \frac{1}{2}i \left(z_n - \frac{2(-1 + 2i)(-i)}{i(-i)} \right) = \frac{1}{2}i (z_n - 2(-1 + 2i)(-i)) \\ &= \frac{1}{2}i (z_n - (2i + 4)) = \frac{1}{2}iu_n.\end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$.

- $u_0 = z_0 - (4 + 2i) = -4 - 2i = \left(\frac{1}{2}i\right)^0 (-4 - 2i)$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$. Alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{1}{2}iu_n \text{ (d'après la question a)} \\ &= \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (-4 - 2i).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$.

2) Soit n un entier naturel. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$ est

$$z_{\overrightarrow{AM_n}} = z_n - z_A = u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

On en déduit que

$$z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4} (-4 - 2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i) = \frac{1}{16}z_{\overrightarrow{AM_n}}.$$

Par suite, $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ sont colinéaires ou encore

les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.