

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Donc, 1 est une solution entière de l'équation (E).

2) Pour tout nombre complexe z ,

$$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2.$$

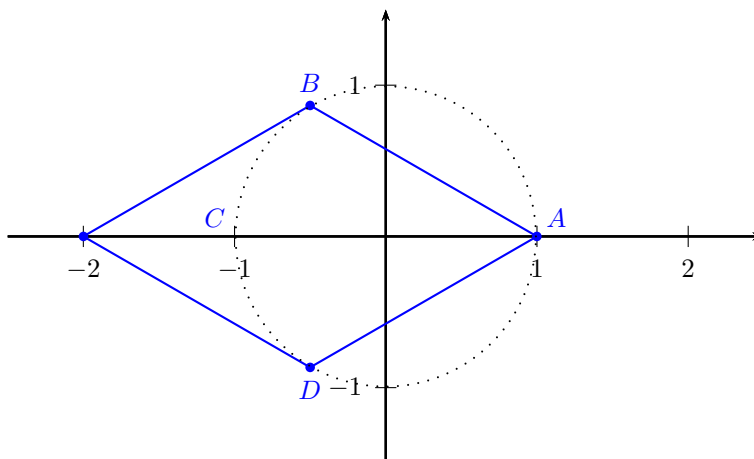
3) Soit z un nombre complexe. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.

• Le discriminant de l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. L'équation $z^2 + z - 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$.

• Le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Δ est strictement négatif et donc l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ sont 1, -2, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 1$, $b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = -2$ et $d = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Les coordonnées respectives des points A, B, C et D sont $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-2, 0)$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et le vecteur \overrightarrow{DC} a pour coordonnées $(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-3, 0)$ et le vecteur \overrightarrow{BD} a pour coordonnées $(0, -\sqrt{3})$. Ensuite,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (-3) \times 0 + 0 \times (-\sqrt{3}) = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires et donc le parallélogramme $ABCD$ est un losange.