

Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) On considère l'équation

$$(E) : z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2) On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B .

Justifier que le triangle OAB est isocèle en O .

3) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (-6)^2 - 4c = 36 - 4c = 4(9 - c).$$

Puisque $c > 9$, on a $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles conjuguées z_A et z_B .

b) Puisque $\Delta = -4(c-9)$ avec $c-9 > 0$, on a $z_A = \frac{6 + i\sqrt{4(c-9)}}{2 \times 1} = \frac{6 + 2i\sqrt{c-9}}{2} = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2) $OA = |z_A| = |3 + i\sqrt{c-9}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{c-9})^2} = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$.

De même, $OB = |3 - i\sqrt{c-9}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{c-9})^2} = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$ (on peut aussi écrire $OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = OA$).

Puisque $OA = OB$, le triangle OAB est isocèle en O .

3) $BA = |z_A - z_B| = |2i\sqrt{c-9}| = 2\sqrt{c-9}|i| = 2\sqrt{c-9}$. Puis

$$\begin{aligned} BA^2 = OA^2 + OB^2 &\Leftrightarrow (2\sqrt{c-9})^2 = (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c})^2 \\ &\Leftrightarrow 4(c-9) = 2c \Leftrightarrow 4c - 36 = 2c \Leftrightarrow 2c = 36 \\ &\Leftrightarrow c = 18. \end{aligned}$$

De plus, on a effectivement $18 > 9$. D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, si $c = 18$, le triangle OAB est rectangle en O .