

# France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2) Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$  son image d'affixe  $z'$ . On note  $N$  le point d'affixe  $z_N = z^2$ .  
Montrer que  $M$  est le milieu du segment  $[NM']$ .

3) Dans cette question, on suppose que le point  $M$  ayant pour affixe  $z$ , appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1. On note  $\theta$  un argument de  $z$ .

a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes  $z$  et  $z_N$ , ainsi qu'un argument de  $z_N$  en fonction de  $\theta$ .

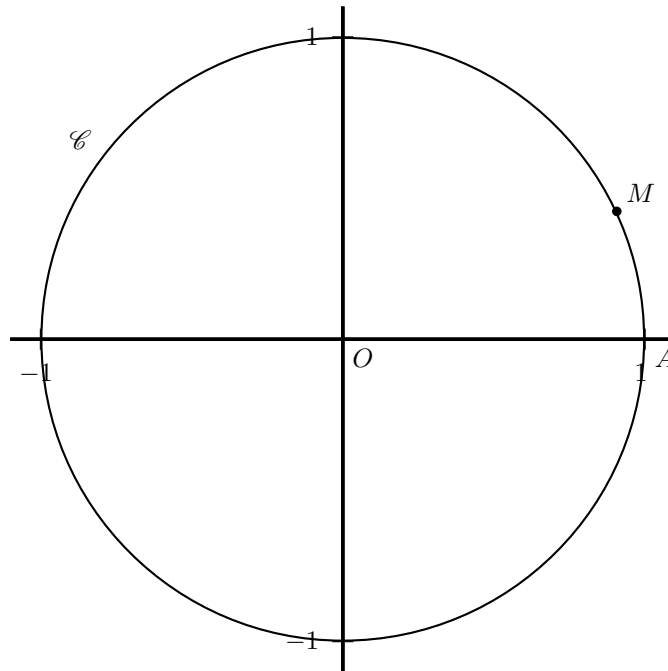
b) Sur la figure donnée en annexe page 7, on a représenté un point  $M$  sur le cercle  $\mathcal{C}$ .

Construire sur cette figure les points  $N$  et  $M'$  en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

c) Soit  $A$  le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle  $AMM'$  ?

**La page 7 contenant l'annexe est à rendre avec la copie**

Exercice 2



# France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation proposée est  $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = -4 < 0$ . L'équation proposée admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2(-1)} = 1 - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 + i.$$

Soit  $z \in \mathbb{C}$ .  $z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1 + i, 1 - i\}$ . Les points du plan dont l'image est le point d'affixe 2 sont les points d'affixes respectives  $1 + i$  et  $1 - i$ .

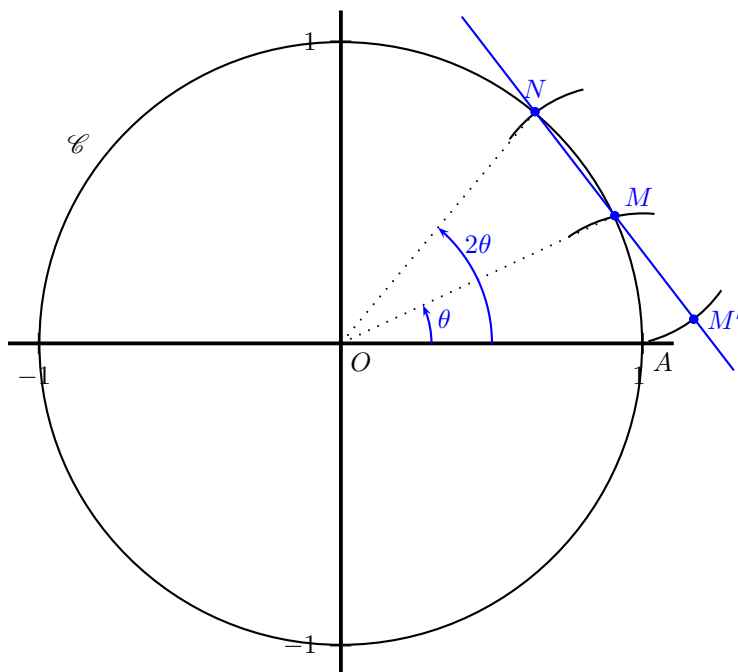
2)

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + (-z^2 + 2z)}{2} = z = z_M.$$

Donc, le point  $M$  est le milieu du segment  $[NM']$ .

3) a)  $|z| = OM = 1$ . Donc,  $z$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta$ . On en déduit que  $z = e^{i\theta}$ . Mais alors,  $z_N = z^2 = e^{2i\theta}$  et donc un argument de  $z_N$  est  $2\theta$ .

b) Construction. On plante le compas en  $A$  avec une ouverture  $AM$ . On reporte ensuite au compas l'arc  $\widehat{AM}$  pour obtenir le point  $N$ . On trace la droite  $(NM)$ . On reporte la distance  $NM$  au compas à partir de  $M$  sur la droite  $(NM)$  et on obtient le point  $M'$ .



c)  $MA = MN = MM'$  et donc le triangle  $AMM'$  est isocèle en  $M$ .