EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) La forme algébrique de z^2 est :

$$A\ :\quad 2\sqrt{2} \qquad B\ :\quad 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} \qquad C\ :\quad 2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2}) \qquad D\ :\quad 2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}.$$

2) z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

$$A\ :\quad 4e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad B\ :\quad 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad C\ :\quad 4e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad D\ :\quad 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

3) z s'écrit sous forme exponentielle :

$$A\ :\quad 2e^{i\frac{7\pi}{8}} \qquad B\ :\quad 2e^{i\frac{\pi}{8}} \qquad C\ :\quad 2e^{i\frac{5\pi}{8}} \qquad D\ :\quad 2e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

4) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

$$A\ :\quad \frac{7\pi}{8} \qquad B\ :\quad \frac{5\pi}{8} \qquad C\ :\quad \frac{3\pi}{8} \qquad D\ :\quad \frac{\pi}{8}.$$

EXERCICE 3

1)	**B**
2)	**B**
3)	**A**
4)	**D**

Explications.

1)

$$\begin{aligned}z^2 &= \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\\ &= (-1)^2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + i^2\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{4-2} - (2-\sqrt{2})\\ &= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2) $z^2 = 2\sqrt{2}(1-i) = 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3) Soit Z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}Z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} &\Leftrightarrow Z^2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2 \Leftrightarrow Z^2 - \left(2e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (Z - 2e^{-i\frac{\pi}{8}})(Z + 2e^{-i\frac{\pi}{8}}) = 0\\ &\Leftrightarrow Z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } Z = -2e^{-i\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

On note alors que $-e^{-i\frac{\pi}{8}} = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{8}} = e^{i(\pi-\frac{\pi}{8})} = e^{i\frac{7\pi}{8}}$. z est donc l'un des deux nombres $2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ ou $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$. Maintenant, la partie réelle de z vaut $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et est donc un nombre strictement négatif. Comme $2\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) < 0$ (et $2\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) > 0$), on a donc $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

4) Ainsi $-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Enfin, comme $\frac{\pi}{8} = \pi - \frac{7\pi}{8}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$. Par suite

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.