

EXERCICE 3

- 1) B
 2) B
 3) A
 4) D

Explications.

1)

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= (-1)^2 \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + i^2 \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{4-2} - (2-\sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2) $z^2 = 2\sqrt{2}(1-i) = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

3) Soit Z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} Z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} &\Leftrightarrow Z^2 = (2e^{-i\frac{\pi}{8}})^2 \Leftrightarrow Z^2 - (2e^{-i\frac{\pi}{8}})^2 = 0 \Leftrightarrow (Z - 2e^{-i\frac{\pi}{8}})(Z + 2e^{-i\frac{\pi}{8}}) = 0 \\ &\Leftrightarrow Z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } Z = -2e^{-i\frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

On note alors que $-e^{-i\frac{\pi}{8}} = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{8}} = e^{i(\pi-\frac{\pi}{8})} = e^{i\frac{7\pi}{8}}$. z est donc l'un des deux nombres $2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ ou $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Maintenant, la partie réelle de z vaut $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et est donc un nombre strictement négatif. Comme $2\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) < 0$ (et $2\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) > 0$), on a donc $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

4) Ainsi $-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Enfin, comme $\frac{\pi}{8} = \pi - \frac{7\pi}{8}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$. Par suite

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$